
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°12

Exercice 1 : Deux endomorphismes sur les polynômes

1. • Soit $(P, Q) \in E^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P' + \mu Q' \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{aligned}$$

ce qui assure la linéarité de f .

- Soit $(P, Q) \in F^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} g(\lambda P(X) + \mu Q(X)) &= (X+1)(\lambda P(X) + \mu Q(X)) \\ &= \lambda(X+1)P(X) + \mu(X+1)Q(X) \\ &= \lambda g(P(X)) + \mu g(Q(X)), \end{aligned}$$

ce qui assure la linéarité de g .

Ainsi, f et g sont linéaires.

2. La famille $\mathcal{B}_E$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés : elle est donc libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de E et que $\dim(E) = 3$, on en déduit que

la famille $\mathcal{B}_E$ est une base de E .

3. On a $\dim(F) = 2$. Les vecteurs de $\mathcal{B}_E$ (resp. de $\mathcal{C}_E$) étant libres, on en extrait une base de F en prenant les deux vecteurs qui appartiennent à F , i.e. $\mathcal{B}_F = (1, X+1)$ (resp. $\mathcal{C}_F = (1, X)$.)

4. On a $f(1) = 0$, $f(X) = 1$ et $f(X^2) = 2X$. La matrice de f dans les bases $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{C}_F$ s'écrit donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De même, on a $g(1) = X+1$ et $g(X) = X^2 + X$.

La matrice de g dans les bases $\mathcal{C}_F$ et $\mathcal{C}_E$ s'écrit donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On a $f \circ g(1) = f(X+1) = 1$ et $f \circ g(X) = f(X^2 + X) = 2X + 1$. La matrice de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{C}_F$ s'écrit donc

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Vérifions le résultat de la question précédente par un calcul matriciel. On a

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= C, \end{aligned}$$

ce qui est cohérent car $C = \text{Mat}_{\mathcal{C}_F}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_F}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}_F, \mathcal{C}_E}(g) = AB$.

7. On a $f(1) = 0$, $f(X + 1) = 1$ et $f\left(\frac{(X + 1)^2}{2}\right) = X + 1$. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ s'écrit donc

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on a $g(1) = X + 1$ et $g(X + 1) = (X + 1)^2 = 2\frac{(X + 1)^2}{2}$. Ainsi, la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$ s'écrit

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} C' &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f \circ g) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(g) \\ &= A'B' \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On pouvait aussi remarquer que $f \circ g(1) = 1$ comme vu précédemment et que $f \circ g(X + 1) = f((X + 1)^2) = 2(X + 1)$.

8. Par définition, la matrice de passage de la base $\mathcal{C}_F$ à la base $\mathcal{B}_F$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}(\text{Id}_F)$.

On a alors $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}(\text{Id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = PA'$ d'où

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. Puisque $\frac{(X+1)^2}{2} = \frac{1}{2}X^2 + X + \frac{1}{2}$, la matrice de passage de la base $\mathcal{C}_E$ à $\mathcal{B}_E$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On sait que $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_E}(\text{Id}_E)$.

On a alors $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_E}(\text{Id}_E) = A Q$.

10. On a

$$P C' P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f \circ g) \text{Mat}_{\mathcal{C}_F, \mathcal{B}_F} = \text{Mat}_{\mathcal{C}_F}(f \circ g) \text{Mat} = C.$$

Exercice 2 : Trace d'une matrice

1. $\boxed{\text{Tr}(0_n) = \sum_{k=1}^n 0 = 0}$ et $\boxed{\text{Tr}(I_n) = \sum_{k=1}^n 1 = n}$.

2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\text{Tr}(A^T) = \sum_{i=1}^n (A^T)_{i,i} = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

d'où $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)}$.

(b) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^n (\lambda A + \mu B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n b_{i,i}$$

d'où $\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)}$. Ainsi, l'application Tr est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$: c'est bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(c) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On a

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n (BA)_{j,j} = \text{Tr}(BA).$$

Ainsi, $\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)}$.

(d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. D'après la question précédente, on a

$$\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}((P^{-1}A)P) = \text{Tr}(P(P^{-1}A))$$

d'où $\boxed{\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)}$.

3. (a) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$. On sait d'après la formule de changement de base que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P$. D'après la question précédente, ceci implique que $\boxed{\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f))}$.

- (b) Soit $n = \dim(E)$. Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(p)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(p)$. Puisque $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Par propriété d'un projecteur, on a pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p(e_i) = e_i$ et pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$, $p(e_i) = 0_E$ donc la matrice de p dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ dont la trace vaut $r = \dim(\text{Im}(p)) = \text{rg}(p)$.

D'après la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)}$.

4. (a) Tout d'abord, notons que φ_M est à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de la trace, on trouve

$$\varphi_M(\lambda A + \mu B) = \text{Tr}((\lambda A + \mu B)M) = \text{Tr}(\lambda AM + \mu BM) = \lambda \text{Tr}(AM) + \mu \text{Tr}(BM) = \lambda \varphi_M(A) + \mu \varphi_M(B)$$

donc φ_M est linéaire. On a donc bien montré que $\boxed{\varphi_M \text{ est une forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

- (b) • Montrons que l'application φ est linéaire. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Vérifions que $\varphi_{\lambda M + \mu N} = \lambda \varphi_M + \mu \varphi_N$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda M + \mu N}(A) &= \text{Tr}(A(\lambda M + \mu N)) \\ &= \lambda \text{Tr}(AM) + \mu \text{Tr}(AN) \\ &= \lambda \varphi_M(A) + \mu \varphi_N(A) \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de la trace.

Donc $\varphi_{\lambda M + \mu N} = \lambda \varphi_M + \mu \varphi_N$, i.e. $\varphi(\lambda M + \mu N) = \lambda \varphi(M) + \mu \varphi(N)$, ce qui assure la linéarité de φ .

• On remarque que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})) = n^2$.

Montrons que φ est injective.

Soit $M \in \ker(\varphi)$. Alors φ_M est l'application nulle, i.e. pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AM) = 0$.

En particulier, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on a $\text{Tr}(E_{i,j}M) = 0$ où $E_{i,j}$ est la matrice avec un coefficient égal à 1 en i -ème ligne, j -ème colonne, et des 0 partout ailleurs.

Or, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(E_{i,j}M) &= \sum_{k=1}^n (E_{i,j}M)_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \underbrace{(E_{i,j})_{k,l}}_{=\delta_{i,k}\delta_{j,l}} M_{l,k} \\ &= M_{j,i}. \end{aligned}$$

Ainsi, $M_{j,i} = 0$ et ceci est valable pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ donc la matrice M est nulle.

On en déduit que $\ker(\varphi) = \{0\}$, ce qui assure l'injectivité de φ .

Puisque φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie, alors elle est bijective.

La bijectivité de φ s'exprime de la façon suivante : pour toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f = \varphi_M$, i.e. pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = \text{Tr}(AM)$, ce qui répond à la question.

- (c) D'après la question précédente, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = \text{Tr}(AM)$.

Par hypothèse, on a donc pour tout couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\text{Tr}(ABM) = \text{Tr}(BAM)$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$.

En se rappelant que $\text{Tr}(E_{i,j}M) = M_{j,i}$, que $E_{i,j}E_{j,j} = E_{i,j}$ et que $E_{j,j}E_{i,j} = 0$ car $i \neq j$, on obtient

$$M_{j,i} = \text{Tr}(E_{i,j}M) = \text{Tr}(E_{i,j}E_{j,j}M) = \text{Tr}(E_{j,j}E_{i,j}M) = \text{Tr}(0) = 0$$

d'où $M_{j,i} = 0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi M est une matrice diagonale.

Par ailleurs, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$M_{i,i} = \text{Tr}(E_{i,i}M) = \text{Tr}(E_{i,j}E_{j,i}M) = \text{Tr}(E_{j,i}E_{i,j}M) = \text{Tr}(E_{j,j}M) = M_{j,j}$$

d'où $M_{i,i} = M_{j,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Ainsi, tous les coefficients diagonaux de M sont égaux. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.

Finalement, on a donc bien pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = \text{Tr}(A \times \lambda I_n) = \lambda \text{Tr}(A)$,

d'où $\boxed{f = \lambda \text{Tr.}}$