

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°6

Exercice 1 : Un endomorphisme de polynômes

Partie I : Cas $n = 3$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$. Ainsi, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de $n + 1$ polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n + 1$:
la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X + 1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda(P(X + 1) - P(X)) + \mu(Q(X + 1) - Q(X)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)\end{aligned}$$

donc φ est bien linéaire.

Il reste à montrer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X]$.

On a

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_3(X + 1)^3 + a_2(X + 1)^2 + a_1(X + 1) + a_0 - a_3X^3 - a_2X^2 - a_1X - a_0 \\ &= 3a_3X^2 + (3a_3 + 2a_2)X + a_3 + a_2 + a_1 \in \mathbb{R}_3[X].\end{aligned}$$

donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. On a $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \frac{1}{2}X(X - 1) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$ et $P_3 = \frac{1}{6}X(X - 1)(X - 2) = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_3}(X^3 - 3X^2 + X + 2) = \text{Mat}_{\mathcal{C}_3}(\mathcal{B}_3) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(X^3 - 3X^2 + X + 2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{C}_3)^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inversons $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{C}_3)$ par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & | & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_4, L_3 \leftarrow L_3 + 3L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3, L_4 \leftarrow 6L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Mat}_{\mathcal{C}^3}(X^3 - 3X^2 + X + 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ i.e.}$$

$$\boxed{X^3 - 3X^2 + X + 2 = 6P_3 - P_1 + 2P_0.}$$

4. D'après le calcul fait en question 2, on a $\varphi(1) = 0, \varphi(X) = 1, \varphi(X^2) = 2X + 1$ et

$$\varphi(X^3) = 3X^2 + 3X + 1 \text{ donc } \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. On a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{C}_3}(\varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{C}_3)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{C}_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{C}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On lit sur la matrice que $\boxed{\varphi(P_0) = 0, \varphi(P_1) = P_0, \varphi(P_2) = P_1 \text{ et } \varphi(P_3) = P_2.}$

6. Puisque (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) = \text{Vect}(0, P_0, P_1, P_2).$$

Or, (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\boxed{\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X].}$

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = 4 - 3 = 1$.

Or, $1 \in \ker(\varphi)$ donc $\text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X] \subset \ker(\varphi)$ et par égalité des dimensions, on en conclut que $\boxed{\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X].}$

Partie II : Cas général

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $P_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (X - k)$ donc

$$\begin{aligned}
 \varphi(P_{n+1}) &= P_{n+1}(X+1) - P_{n+1}(X) \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\prod_{k=0}^n (X+1-k) - \prod_{k=0}^n (X-k) \right) \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\prod_{k=0}^n (X-(k-1)) - \prod_{k=0}^n (X-k) \right) \\
 &= \frac{X+1-(X-n)}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (X-k) \\
 &= \frac{n+1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (X-k) \\
 &= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (X-k)
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \varphi(P_{n+1}) = P_n.}$

8. • Si $d = 0$, alors P est constant et on a $\varphi(P) = P(X+1) - P(X) = 0$ donc

$$\boxed{\deg(\varphi(P)) = -\infty \text{ si } \deg(P) = 0.}$$

• Supposons que $d = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$. Puisque $(P_0, \dots, P_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$, il existe

$(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^d \lambda_k P_k = \lambda_0 P_0 + \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_{k+1} P_{k+1}$ avec $\lambda_d \neq 0$.

Par linéarité de φ et en utilisant la question précédente, on a

$$\varphi(P) = \lambda_0 \underbrace{\varphi(P_0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_{k+1} \varphi(P_{k+1}) = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_{k+1} P_k.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$.

Puisque $\lambda_d \neq 0$, alors $\deg(\lambda_d P_{d-1}) = d-1 > \deg\left(\sum_{k=0}^{d-2} \lambda_{k+1} P_k\right)$ donc $\deg(\varphi(P)) = d-1$,

i.e. $\boxed{\deg(\varphi(P)) = \deg(P) - 1 \text{ si } \deg(P) > 0.}$

• On en déduit par récurrence descendante que

$$\deg(\varphi^2(P)) = \deg(\varphi(P)) - 1 = \deg(P) - 2, \dots, \deg(\varphi^d(P)) = \deg(P) - d = 0.$$

Ainsi, $\varphi^d(P)$ est constant donc $\boxed{\varphi^{d+1}(P) = \varphi(\varphi^d(P)) = 0.}$

9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k) = \binom{0}{0} (-1)^0 P(X+0) = P = \varphi^0(P),$$

ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\varphi^n(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)$.

Montrons que $\varphi^{n+1}(P) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k)$.

Par linéarité de φ , on a

$$\begin{aligned}
\varphi^{n+1}(P) &= \varphi(\varphi^n(P)) \\
&= \varphi\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \varphi(P(X+k)) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (P(X+k+1) - P(X+k)) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k+1) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} P(X+k) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\underbrace{\binom{n}{k-1}}_{=0 \text{ si } k=0} + \underbrace{\binom{n}{k}}_{=0 \text{ si } k=n+1} \right) (-1)^{n+1-k} P(X+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \varphi^n(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k).$$

10. (a) Soit $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

• Si $d = 0$, on sait que $\varphi(P_d) = 0$.

• Supposons que $d > 0$. On a $\varphi(P_d) = P_{d-1}$, $\varphi^2(P_d) = \varphi(P_{d-1}) = P_{d-2}$, etc...

Par récurrence immédiate, on montre que pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\varphi^k(P_d) = P_{d-k}$.

Finalement, pour tout $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\varphi^k(P_d) = P_{d-k}$.

• Par définition, 0 est racine de P_d pour tout $d > 0$.

Soit $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$.

▷ Si $k \neq d$, alors $d-k > 0$ donc d'après la remarque précédente, $\varphi^k(P_d) = P_{d-k}(0) = 0$.

▷ Si $k = d$, alors $\varphi^k(P_d) = P_0 = 1$ donc $(\varphi^k(P_d))(0) = 1$.

On a donc bien pour tout $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $(\varphi^k(P_d))(0) = \delta_{k,d}$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Puisque $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{d=0}^n \lambda_d P_d$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par linéarité de φ^k , on a $\varphi^k(P) = \sum_{d=0}^n \lambda_d \varphi^k(P_d)$ puis en évaluant ce dernier polynôme en 0, on trouve

$$(\varphi^k(P))(0) = \sum_{d=0}^n \lambda_d \underbrace{(\varphi^k(P_d))(0)}_{=\delta_{k,d}} = \lambda_k$$

et ce pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On a donc bien
$$P = \sum_{k=0}^n (\varphi^k(P))(0) P_k.$$

11. (a) D'après la question précédente, la décomposition de X^n dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est $X^n = \sum_{k=0}^n (\varphi^k(P))(0) P_k$. On sait que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$

et que le coefficient dominant de P_n est $\frac{1}{n!}$. En comparant les coefficients dominants de X^n et P_n , la formule précédente donne $(\varphi^n(X^n))(0) = n!$. Or, $\varphi^n(X^n)$ est un polynôme constant donc $\varphi^n(X^n) = n!$.

En évaluant en 0 la formule trouvée en question 9, on obtient

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n.$$

(b) Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Puisque $i < n$, on sait que $\varphi^n(X^i) = 0$. De nouveau, en évaluant en 0 la formule trouvée en question 9, on obtient

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^i.$$

Exercice 2 : Bases duales et transposition

1. Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par linéarité de e_i^* , on a

$$e_i^*(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{e_i^*(e_j)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_i.$$

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = e_i^*(x)$ donc
$$x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i.$$

2. Soit $\varphi \in E^*$. D'après la question précédente, on a pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i \right) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(x) = \left(\sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* \right) (x)$$

donc $\boxed{\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*}.$

3. La question précédente montre que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une famille génératrice de E^* constituée de n vecteurs de E^* . Or, on sait que $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) = n$ donc $\boxed{(e_1^*, \dots, e_n^*) \text{ est une base de } E^*}.$

4. Par définition de P , on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_j = \sum_{i=1}^n P_{i,j} e_i$. Or, d'après la question 1,

pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f_j = \sum_{i=1}^n e_i^*(f_j) e_i$. Par unicité des coordonnées dans une base, on en déduit que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^*$, $P_{i,j} = e_i^*(f_j)$.

D'après la question précédente, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$e_j^* = \sum_{i=1}^n e_j^*(f_i) f_i^* = \sum_{i=1}^n P_{j,i} f_i^* = \sum_{i=1}^n (P^T)_{i,j} f_i^*.$$

Par définition d'une matrice de passage, ceci signifie que la matrice de passage de la base $(f_1^*, \dots, f_n^*)$ vers $(e_1, \dots, e_n^*)$ est P^T .

On en déduit que $\boxed{\text{la matrice de passage de } (e_1^*, \dots, e_n^*) \text{ vers } (f_1^*, \dots, f_n^*) \text{ est } (P^T)^{-1} = (P^{-1})^T}.$

5. (a) Tout d'abord, puisqu'une composée d'applications linéaires est une application linéaire, il est clair que pour tout $\varphi \in E^*, \varphi \circ f \in E^*$.

Soit $(\varphi, \psi) \in (E^*)^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

On a

$$f^T(\lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi) \circ f = \lambda\varphi \circ f + \mu\psi \circ f = \lambda f^T(\varphi) + \mu f^T(\psi)$$

donc $\boxed{f^T \in \mathcal{L}(E^*)}.$

(b) Par définition de A , on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} e_i$ et $f(e_j) =$

$$\sum_{i=1}^n e_i^*(f(e_j)) e_i \text{ donc pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_{i,j} = e_i^*(f(e_j)) = e_i^* \circ f(e_j).$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$f^T(e_j^*) = e_j^* \circ f = \sum_{i=1}^n (e_j^* \circ f)(e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^n A_{j,i} e_i^* = \sum_{i=1}^n (A^T)_{i,j} e_i^*$$

donc $\boxed{\text{la matrice de } f^T \text{ dans la base } (e_1^*, \dots, e_n^*) \text{ est } A^T}.$

(c) D'après les formules de changement de base, on a

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{C}^*}(f^T) = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(f^T) \text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*) = P^T A^T (P^{-1})^T = (P^{-1} A P)^T}.$$

6. • Montrons que Ψ est linéaire.

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $\varphi \in E^*$, on a

$$(\lambda f + \mu g)^T(\varphi) = \varphi \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi \circ f + \mu \varphi \circ g = \lambda f^T(\varphi) + \mu g^T(\varphi)$$

donc $(\lambda f + \mu g)^T = \lambda f^T + \mu g^T$, i.e. $\Psi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Psi(f) + \mu \Psi(g)$, ce qui prouve que Ψ est linéaire.

- Montrons que Ψ est injectif.

Soit $f \in \ker(\Psi)$, i.e. $f^T = 0$. Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

D'après la question 5.(b), $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(f^T) = A^T$. Puisque $f^T = 0$, on a $A^T = 0$ donc $A = 0$, i.e. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 0$, ce qui prouve que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi, $\ker(\Psi) = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ donc Ψ est injectif.

Or, $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2 = \dim(E^*)^2 = \dim(\mathcal{L}(E^*))$ donc l'injectivité de Ψ implique la bijectivité de Ψ .

On en conclut que Ψ est un isomorphisme.

Problème : Pseudo-inverses

A - Exemples et contre-exemples

1. (a) Soit u^{-1} l'automorphisme réciproque de u .

On a alors $\underbrace{u \circ u^{-1}}_{=\text{Id}_E} \circ u = u, u^{-1} \circ \underbrace{u \circ u^{-1}}_{=\text{Id}_E} = u^{-1}$ et $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$ donc

u^{-1} est un pseudo-inverse de u .

- (b) Par propriété d'un projecteur, on a $p \circ p = p$, donc $p \circ p \circ p = p \circ p = p$. Ainsi, p est un pseudo-inverse de p .

2. (a) • Montrons que f_1 est linéaire. Soient $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$ avec $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$. Soient $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2)$. On a

$$\begin{aligned} f_1(\lambda u + \mu v) &= f_1(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (-\lambda x - \mu x' + \lambda y + \mu y', 0) \\ &= \lambda(-x + y, 0) + \mu(-x' + y', 0) \\ &= \lambda f_1(u) + \mu f_1(v) \end{aligned}$$

donc f_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Puisque $f_1(e_1) = f_1(1, 0) = (-1, 0) = -e_1$ et $f_1(e_2) = f_1(0, 1) = (1, 0) = e_1$, la matrice de f_1 dans la base $\mathcal{B}$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (b) On a $(x, y) \in \ker(f_1) \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow x = y$ donc $\ker(f_1) = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1))$ donc $(1, 1)$ est une base de $\ker(f_1)$. Puisque $\ker(f_1) \neq \{(0, 0)\}$, on peut affirmer que f_1 n'est pas injectif.

On a $\text{Im}(f_1) = \text{Vect}(f_1(e_1), f_1(e_2)) = \text{Vect}((-1, 0), (1, 0)) = \text{Vect}((1, 0))$ donc

$(1, 0)$ est une base de $\text{Im}(f_1)$.

Puisque $\text{Im}(f_1) \neq \mathbb{R}^2$, on peut affirmer que f_1 n'est pas surjectif.

Enfin, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1)$ donc $f_1^2 \neq f_1$, ce qui signifie que f_1 n'est pas un projecteur. Notons que $f_1^2 = -f_1$.

- (c) $((1, 0), (1, 1))$ est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) à deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0)) \oplus \text{Vect}((1, 1)) = \text{Im}(f_1) \oplus \text{ker}(f_1)}$.

- (d) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g \circ f_1 = f_1 \circ g &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f_1) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1 \circ g) \\ &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & a \\ -b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & -c+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b = 0 \\ d = a+c \end{cases}} \end{aligned}$$

- (e) Raisonnons par analyse-synthèse.

•**Analyse :**

Supposons que f_1 admette un pseudo-inverse g tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, puisque $g \circ f_1 = f_1 \circ g$, on a $b = 0$ et $d = a + c$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a+c \end{pmatrix}$.

De plus, puisque $f_1 = f_1 \circ g \circ f_1$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1)$, i.e.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $a = -1$.

Enfin, puisque $g = g \circ f_1 \circ g$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$, i.e.

$$\begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $c = 1$.

Finalement, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1)$ donc $g = f_1$.

•**Synthèse :** Soit $g = f_1$. On a déjà remarqué que $f_1^2 = -f_1$.

On a alors

$$f_1 \circ g \circ f_1 = f_1^3 = f_1^2 \circ f_1 = -f_1 \circ f_1 = -f_1^2 = f_1,$$

$$g \circ f_1 \circ g = -f_1 \circ f_1 \circ (-f_1) = f_1^3 = f_1 = g$$

et $g \circ f_1 = f_1 \circ g = f_1^3$ donc g est bien un pseudo-inverse de f_1 .

On en conclut que $\boxed{f_1 \text{ est l'unique pseudo-inversse de } f_1}$.

3. (a) On a $\text{ker}(f_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0))$.

D'autre part, $\text{Im}(f_2) = \{(y, 0), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0)) = \text{ker}(f_2)$. Ainsi, $\text{ker}(f_2) \cap \text{Im}(f_2) = \text{Vect}((1, 0)) \neq \{(0, 0)\}$ donc $\text{ker}(f_2)$ et $\text{Im}(f_2)$ ne sont pas en somme directe.

A fortiori, $\boxed{\text{on n'a pas } \mathbb{R}^2 = \text{ker}(f_2) \oplus \text{Im}(f_2)}$.

(b) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Posons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
g \circ f_2 = f_2 \circ g &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (ax + cy, ay).
\end{aligned}$$

Les endomorphismes qui commutent avec f_2 sont donc de la forme

$$\boxed{g(x, y) = (ax + cy, ay), \text{ où } (a, c) \in \mathbb{R}^2.}$$

(c) Supposons que f_2 admette un pseudo-inverse g . Alors $g \circ f_2 = f_2 \circ g$ donc d'après la question précédente, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Puisque $f_2 = f_2 \circ g \circ f_2$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2)$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est absurde !

On en conclut que $\boxed{f_2 \text{ n'admet pas de pseudo-inverse.}}$

B - D'autres pseudo-inverses

1. On remarque que les trois conditions pour que g soit un pseudo-inverse de f sont symétriques, i.e. elles sont inchangées si on échange f et g . On en déduit que si g est un pseudo-inverse de f , alors $\boxed{f \text{ est un pseudo-inverse de } g.}$

2. Puisque f et g commutent, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k \circ g^k \circ f^k = (f \circ g \circ f)^k = f^k, \quad g^k \circ f^k \circ g^k = (g \circ f \circ g)^k = g^k \quad \text{et} \quad f^k \circ g^k = g^k \circ f^k$$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, g^k \text{ est un pseudo-inverse de } f^k.}$

3. Posons $\tilde{g} = h \circ g \circ h^{-1}$.

On a

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = (h \circ f \circ h^{-1}) \circ (h \circ g \circ h^{-1}) \circ (h \circ f \circ h^{-1}) = h \circ (f \circ g \circ f) \circ h^{-1} = h \circ f \circ h^{-1} = \tilde{f},$$

$$\tilde{g} \circ \tilde{f} \circ \tilde{g} = (h \circ g \circ h^{-1}) \circ (h \circ f \circ h^{-1}) \circ (h \circ g \circ h^{-1}) = h \circ (g \circ f \circ g) \circ h^{-1} = h \circ g \circ h^{-1} = \tilde{g},$$

et

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} = (h \circ f \circ h^{-1}) \circ (h \circ g \circ h^{-1}) = h \circ (f \circ g) \circ h^{-1} = h \circ (g \circ f) \circ h^{-1} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$$

donc $\boxed{\tilde{g} = h \circ g \circ h^{-1} \text{ est un pseudo-inverse de } \tilde{f}.}$

4. Posons $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la projection sur $\text{Vect}(e_2)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1)$, i.e. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $p(x, y) = (0, y)$.

D'après la question 1 de la partie A, on sait que p admet un pseudo-inverse. De plus, on a montré en partie A que f_1 admet un pseudo-inverse.

Or, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(f_1 \circ p)(x, y) = f_1(0, y) = (y, 0) = f_2(x, y)$ donc $f_1 \circ p = f_2$ et on a montré en partie A que f_2 n'admet pas de pseudo-inverse.

Ainsi, f_1 et p admettent chacun un pseudo-inverse mais $f_1 \circ p$ n'en admet pas.

5. On a d'une part $\underbrace{f \circ g \circ f}_{=f} \circ h = f \circ h$.

D'autre part, $(f \circ g) \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ \underbrace{(h \circ f)}_{=f} = g \circ f$.

Ainsi, $h \circ f = f \circ h = g \circ f = f \circ g$.

On en déduit que $g = \underbrace{g \circ f \circ g}_{=h \circ f} = \underbrace{h \circ f \circ g}_{=f \circ h} = h \circ f \circ h = h$ donc f admet un unique pseudo-inverse.

C - Condition nécessaire d'existence

1. En utilisant les propriétés du pseudo-inverse, on a

$$(f \circ g)^2 = (f \circ g) \circ \underbrace{(f \circ g)}_{=g} = f \circ g$$

donc $f \circ g = g \circ f$ est un projecteur.

2. (a) • Soit $x \in \ker(f)$. On a $f(x) = 0_E$ donc $g \circ f(x) = g(0_E) = 0_E$ i.e. $x \in \ker(g \circ f)$, ce qui prouve l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.

En utilisant la même propriété, on a $\ker(g \circ f) \subset \ker(f \circ g \circ f) = \ker(f)$ car $f \circ g \circ f = f$.

On a donc bien $\ker(g \circ f) = \ker(f)$.

• Soit $x \in \text{Im}(f \circ g)$. Il existe un $a \in E$ tel que $x = f \circ g(a) = f(g(a)) \in \text{Im}(f)$, ce qui prouve l'inclusion $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$.

En utilisant la même propriété, puisque $f = f \circ g \circ f$, on a $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g \circ f) \subset \text{Im}(f \circ g)$ d'où finalement $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$.

- (b) Puisque $f \circ g = g \circ f$ est un projecteur, on a $E = \ker(f \circ g) \oplus \text{Im}(f \circ g)$.

Or, d'après la question précédente, $\ker(f \circ g) = \ker(g \circ f) = \ker(f)$ et $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$ donc $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

D - Condition suffisante d'existence

1. Pour tout $x \in \text{Im}(f)$, on a $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$, i.e. $\text{Im}(f)$ est stable par f .

2. • Soit $y \in \text{Im}(f)$.

Par définition, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Puisque $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$, il existe $(x_K, x_I) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)$ tel que $x = x_K + x_I$.

Par linéarité de f , on a $f(x) = f(x_K) + f(x_I)$. Or, $f(x_K) = 0_E$ car $x_K \in \ker(f)$ donc $f(x) = f(x_I)$ avec $x_I \in \text{Im}(f)$, i.e. $y = f_I(x_I)$, ce qui prouve que f_I est surjectif.

• Soit $x \in \ker(f_I)$. Alors $f_I(x) = f(x) = 0_E$ donc $x \in \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. Ainsi, $\ker(f_I) = \{0_E\}$, ce qui prouve que f_I est injectif.

On en conclut que f_I est bijectif.

3. (a) Soient $x = x_K + x_I$ avec $(x_K, x_I) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)$ et $y = y_K + y_I$ avec $(y_K, y_I) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\begin{aligned}
 g(\lambda x + \mu y) &= g(\underbrace{(\lambda x_K + \mu y_K)}_{\in \ker(f)} + \underbrace{(\lambda x_I + \mu y_I)}_{\in \text{Im}(f)}) \\
 &= f_I^{-1}(\lambda x_I + \mu y_I) \\
 &= \lambda f_I^{-1}(x_I) + \mu f_I^{-1}(y_I) \quad (\text{linéarité de } f_I^{-1}) \\
 &= \lambda g(x) + \mu g(y)
 \end{aligned}$$

donc g est linéaire.

- (b) Soit $x = x_K + x_I$ avec $(x_K, x_I) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)$. Puisque $x_K \in \ker(f)$, on a $f(x) = f(x_K) + f(x_I) = f(x_I) = f_I(x_I)$ donc :

- $f \circ g \circ f(x) = f(g(f_I(x_I))) = f(f_I^{-1}(f_I(x_I))) = f(x_I) = f(x);$
- $g \circ f \circ g(x) = g \circ f(\underbrace{f_I^{-1}(x_I)}_{\in \text{Im}(f)}) = g(f_I(f_I^{-1}(x_I))) = g(x_I) = f_I^{-1}(x_I) = g(x);$

- $g \circ f(x) = g(f_I(x_I)) = f_I^{-1}(f_I(x_I)) = x_I = f_I(f_I^{-1}(x_I)) = f(f_I^{-1}(x_I)) = f \circ g(x).$

On a donc bien $f = f \circ g \circ f$, $g = g \circ f \circ g$ et $f \circ g = g \circ f$ donc g est le pseudo-inverse de f .