
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°6
Samedi 14 mars 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, d'un problème et comporte 5 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Un endomorphisme de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k).$$

Notons que, par convention, $P_0 = 1$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I : Cas $n = 3$

Dans cette partie, on note

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

2. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_3$ vers la base $\mathcal{C}_3$. En déduire les coordonnées de $X^3 - 3X^2 + X + 2$ dans la base $\mathcal{C}_3$.
4. Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_3$.
5. A l'aide d'une formule de changement de base, calculer la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}_3$. En déduire sans calcul les valeurs de $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ et $\varphi(P_3)$.
6. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$.

Partie II : Cas général

On prolonge φ à $\mathbb{R}[X]$ en posant pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$. Ainsi défini, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$\varphi^k = \begin{cases} \text{Id}_E & \text{si } k = 0 \\ \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ fois}} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(P_{n+1}) = P_n$.
8. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Préciser le degré de $\varphi(P)$ et donner la valeur de $\varphi^{d+1}(P)$.
9. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k).$$

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul fixé.

10. (a) Pour tout $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, calculer $\varphi^k(P_d)$ et en déduire que $(\varphi^k(P_d))(0) = \delta_{k,d} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- (b) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{k=0}^n (\varphi^k(P))(0) P_k.$$

11. (a) Calculer $\varphi^n(X^n)$ puis établir la formule suivante :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n.$$

(b) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^i = 0.$$

Exercice 2 : Bases duales et transposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On pose $n = \dim(E)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E , i.e. $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $e_i^* \in E^*$ par

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E, x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$.

2. Montrer que pour tout $\varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

3. Montrer que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* . On dit que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

4. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E .

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ vers la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Montrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ vers la base $\mathcal{C}^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ est $(P^{-1})^T$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application f^T par

$$f^T: \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longrightarrow & \varphi \circ f \end{array}.$$

5. (a) Montrer que $f^T \in \mathcal{L}(E^*)$.

(b) Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que la matrice de f^T dans la base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est A^T .

(c) En déduire l'expression de la matrice de f^T dans la base $\mathcal{C} = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ en fonction de A et P .

On définit

$$\Psi: \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E^*) \\ f & \longmapsto & f^T \end{array}.$$

6. Montrer que Ψ est un isomorphisme.

Problème : Pseudo-inverses

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

On dit qu'un endomorphisme g de E est un *pseudo-inverse* de f s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $f \circ g \circ f = f$
2. $g \circ f \circ g = g$
3. $f \circ g = g \circ f$.

On rappelle que pour tout endomorphisme f , et tout k entier, f^k désigne l'endomorphisme $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$, avec la convention $f^0 = \text{Id}_E$.

A - Exemples et contre-exemples

1. Exhiber un pseudo-inverse pour chacun des endomorphismes suivants.
 - (a) Un automorphisme u de E .
 - (b) Un projecteur p de E .
2. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on considère l'application

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x + y, 0) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère un endomorphisme g de E et on note $g(e_1) = (a, b)$ et $g(e_2) = (c, d)$.

- (a) Montrer que f_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
 - (b) Déterminer une base de $\ker(f_1)$ et une base de $\text{Im}(f_1)$. L'endomorphisme f_1 est-il injectif? surjectif? Est-ce un projecteur?
 - (c) Montrer que $\mathbb{R}^2 = \text{Im}(f_1) \oplus \ker(f_1)$.
 - (d) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, b, c et d pour qu'on ait $g \circ f_1 = f_1 \circ g$.
 - (e) Montrer que f_1 admet un unique pseudo-inverse, que l'on déterminera.
3. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on considère l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, 0) \end{aligned}$$

- (a) A-t-on $\mathbb{R}^2 = \ker(f_2) \oplus \text{Im}(f_2)$?
 - (b) Déterminer tous les endomorphismes g qui commutent avec f_2 .
 - (c) En déduire que f_2 n'a pas de pseudo-inverse.

B - D'autres pseudo-inverses

Soit f un endomorphisme de E admettant un pseudo-inverse g .

1. Montrer que g admet aussi un pseudo-inverse, à déterminer.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k admet un pseudo-inverse, à déterminer.
3. Soit h un automorphisme de E .
Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f} = h \circ f \circ h^{-1}$ admet un pseudo-inverse, à déterminer.

4. La composée de deux endomorphismes admettant chacun un pseudo-inverse admet-elle nécessairement un pseudo-inverse ?

Indication : On pourra s'intéresser à l'application f_1 de la partie A, et au projecteur sur $\text{Vect}(e_2)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1)$.

5. On veut démontrer que le pseudo-inverse de f , s'il existe, est unique. On suppose donc que f admet deux pseudo-inverses g et h . En considérant $f \circ g \circ f \circ h$, démontrer que $g = h$.

C - Condition nécessaire d'existence

Soit f un endomorphisme de E admettant un pseudo-inverse g .

1. Démontrer que l'endomorphisme $f \circ g = g \circ f$ est un projecteur.
2. (a) Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker(f)$ et $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$.

(b) En déduire que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

D - Condition suffisante d'existence

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$. On va démontrer que f admet un pseudo-inverse.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de E est dit *stable* par f si $f(V) \subset V$.

1. Vérifier que l'espace $\text{Im}(f)$ est stable par f .

On peut donc considérer l'endomorphisme f_I induit par f sur $\text{Im}(f)$:

$$\begin{array}{ccc} f_I & : & \text{Im}(f) \longrightarrow \text{Im}(f) \\ & & x \longmapsto f(x) \end{array} .$$

2. Démontrer que f_I est bijectif.
3. On définit l'application $g : E \rightarrow E$ de la façon suivante : à tout vecteur $x \in E$ dont la décomposition sur la somme directe $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ est $x = x_K + x_I$, avec $(x_K, x_I) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)$, on associe le vecteur $g(x) = f_I^{-1}(x_I)$.
(a) Démontrer que g est linéaire.
(b) Vérifier que g est le pseudo-inverse de f .