
DEVOIR MAISON N°2
A RENDRE POUR LE LUNDI 29 SEPTEMBRE 2025

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On veut savoir s'il existe $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant tels que

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

- (a) Exprimer $\sum_{k=0}^n a_k$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ en fonction de a_0 et n .
(b) En déduire la relation (donnant la valeur de a_0 en fonction de n) qui est nécessaire et suffisante pour que $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ existent.
(c) Expliciter les égalités obtenues pour $n = 1, 2$ et 3 .
2. On veut savoir cette fois s'il existe $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant tels que

$$\sum_{k=0}^n b_k^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2.$$

- (a) Exprimer $\sum_{k=0}^n b_k^2$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2$ en fonction de b_0 et n .
(b) En déduire la relation (donnant la valeur de b_0 en fonction de n) qui est nécessaire et suffisante pour que $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ existent.
(c) Expliciter les égalités obtenues pour $n = 1, 2$ et 3 .

Exercice 2.

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \prod_{j=1}^n (1 - a_j).$$

- (a) Que vaut P_0 ?
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation de récurrence très simple existe-t-il entre P_n et P_{n+1} ?
(c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1.$$

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $a_j = \frac{j}{n}$ de sorte que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P_k = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

(a) Calculer P_n puis montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$P_k = \frac{k!}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

(b) La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$?

(c) Montrer que $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1$.