

L'objectif de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un **segment** à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Aussi, dans tout le chapitre, $[a, b]$ désignera un segment inclus dans $\mathbb{R}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

La définition de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle quelconque sera vue en deuxième année.

21.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

21.1.1 Fonctions en escalier

Définition 1: Subdivision d'un segment

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$.

On appelle subdivision du segment $[a, b]$ tout sous-ensemble fini $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

La quantité $\max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$ est appelée le pas de la subdivision.

Remarque 1. On dit que la subdivision est régulière si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Dans ce cas, le pas de la subdivision vaut $\frac{b-a}{n}$.

Définition 2: Fonctions en escalier

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est une fonction en escalier sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$.

Une telle subdivision est dite adaptée à la fonction f .

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2. • La valeur de la fonction f en les $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ n'a aucune importance. En particulier, une fonction en escalier n'est pas nécessairement continue.

• Si f et g sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est en escalier sur $[a, b]$.

En effet, f et g ne changent de valeur qu'un nombre fini de fois et on trouve une subdivision adaptée à la fois pour f et pour g en considérant tous les réels de $[a, b]$ (qui sont nécessairement

en nombre fini) où une des deux fonctions change de valeur. Cette subdivision sera alors adaptée à $\alpha f + \beta g$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 3: Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Soit $\{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision adaptée à la fonction f telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, f|_{]x_k, x_{k+1}[} = \lambda_k.$$

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$, notée $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$ la quantité

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k.$$

Remarque 3. • Notons que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie, pourvu qu'elle soit adaptée à f .

- Si f est constante égale à λ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = \lambda(x_n - x_0) = \lambda(b - a).$$

En particulier, l'intégrale de la fonction nulle est nulle.

• Géométriquement, l'intégrale d'une fonction en escalier correspond à une somme d'aires de rectangles comptées positivement si le rectangle est situé au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.

- Par convention, on pose $\int_a^a f = 0$.

Proposition 1: Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

Soient f et g deux fonctions en escalier sur le segment $[a, b]$.

1. (Linéarité) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

2. (Positivité) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

3. (Croissance) Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

4. (Relation de Chasles)

Pour tout $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Démonstration.

Soit $\{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision adaptée à f et à g , i.e. pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe $(\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \in]x_k, x_{k+1}[$, $f(t) = \lambda_k$ et $g(t) = \mu_k$.

Par définition, on a alors $\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k$ et $\int_a^b g = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k$.

1. Fixons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

La subdivision $\{x_0, \dots, x_n\}$ est adaptée à $\alpha f + \beta g$ car pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour tout $t \in]x_k, x_{k+1}[$, $\alpha f(t) + \beta g(t) = \alpha \lambda_k + \beta \mu_k$.

Ainsi, par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k + \beta \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

2. Supposons que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_k \geq 0$ donc

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k \geq 0 \text{ car c'est une somme de termes positifs.}$$

3. Supposons que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$, i.e. $g - f \geq 0$ sur $[a, b]$. Puisque $g - f$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, d'après le point précédent, on a $\int_a^b g - f \geq 0$.

Or, d'après le premier point, $\int_a^b g - f = \int_a^b g - \int_a^b f$ donc $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$, i.e. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

4. Soit $c \in [a, b]$.

- Si $c \in \{x_0, \dots, x_n\}$, notons $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_p = c$ et on a alors

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k + \sum_{k=p}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k = \int_a^b f.$$

- Sinon, notons $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{p-1} < c < x_p$. On pose alors la nouvelle subdivision suivante : pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $y_k = x_k$, $y_p = c$ et pour tout $k \in \llbracket p+1, n+1 \rrbracket$, $y_k = x_{k-1}$. Posons alors pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\lambda'_k = \lambda_k$ et pour tout $k \in \llbracket p, n \rrbracket$, $\lambda'_k = \lambda_{k-1}$ de telle sorte que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f|_{]y_k, y_{k+1}[} = \lambda'_k$.

L'ensemble $\{y_0, \dots, y_{n+1}\}$ est alors une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f telle que $\{y_0, \dots, y_p\}$ est une subdivision de $[a, c]$ et $\{y_p, \dots, y_{n+1}\}$ est une subdivision de $[c, b]$.

Par définition, on a alors

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \sum_{k=0}^{p-1} (y_{k+1} - y_k) \lambda'_k + \sum_{k=p}^n (y_{k+1} - y_k) \lambda'_k = \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k) \lambda'_k = \int_a^b f.$$

Dans les deux cas, on a bien $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

■

Remarque 4. D'après la relation de Chasles, on a $\int_a^a f + \int_a^b f = \int_a^b f$ donc on retrouve $\int_a^a f = 0$.

21.1.2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Lemme 1: Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

• Commençons par montrer qu'il existe une fonction en escalier g sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Notons

$$E = \{t \in [a, b], \exists g \in \mathcal{E}([a, t], \mathbb{R}), \forall x \in [a, t], |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Tout d'abord, notons que $a \in E$: en effet, la fonction $g : x \mapsto f(a)$ est en escalier sur $[a, a]$ et vérifie bien $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, a]$.

Ainsi, E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par b : elle admet donc une borne supérieure, notée $s \in [a, b]$.

Montrons que $s \in E$ et que $s = b$.

Par continuité de f en s , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [s - \delta, s + \delta] \cap [a, b]$, $|f(x) - f(s)| \leq \varepsilon$.

Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $t_0 \in E$ tel que $s - \delta < t_0 \leq s$. Par définition de E , il existe donc $g \in \mathcal{E}([a, t_0], \mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in [a, t_0]$, $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

$$\begin{array}{ccc} [a, c] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \text{Posons } c = \min(s + \delta, b) \text{ et } h : & x \longmapsto & \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [a, t_0] \\ f(s) & \text{si } x \in]t_0, c] \end{cases} \end{array}$$

Puisque g est en escalier, la fonction h est en escalier sur $[a, c]$ et on a bien pour tout $x \in [a, c]$, $|f(x) - h(x)| \leq \varepsilon$ donc $c \in E$.

Si $c = s + \delta$, on aurait $s + \delta \in E$ avec $s + \delta > s = \sup(E)$: c'est impossible. Donc $c = b$ et puisque $c \in E$, on en déduit que $b \in E$.

Par définition de E , il existe donc bien $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

• D'après le point précédent, il existe $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ i.e. $g(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq g(x) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) = g(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\psi(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}$.

On a bien $(\varphi, \psi) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}))^2$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$. ■

Proposition 2: Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

On définit l'intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$, notée $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$ par

$$\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \psi \geq f \right\}.$$

Démonstration. • Soit $A = \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\}$. Montrons que $\sup(A)$ existe.

Tout d'abord, notons que cet ensemble est non vide. En effet, d'après le théorème des bornes atteintes, puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, on sait que f y est bornée. Soit $m = \min_{t \in [a, b]} f(t)$.

Soit φ la fonction constante égale à m sur $[a, b]$. Alors $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi \leq f$ donc $\int_a^b \varphi = m(b-a) \in A$, ce qui prouve que A est non vide.

Par ailleurs, soit $M = \max_{t \in [a, b]} f(t)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi \leq f$. Alors pour tout $t \in [a, b]$, $\varphi \leq M$. Soit ψ la fonction constante égale à M sur $[a, b]$. On a alors $\varphi \leq \psi$ et par croissance de l'intégrale d'une fonction en escalier, on obtient

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi = M(b-a).$$

Ainsi, A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par $M(b-a)$: elle admet donc une borne supérieure.

• De même, on montre que $B = \left\{ \int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \psi \geq f \right\}$ admet une borne inférieure.

Avec les mêmes notations que précédemment, B est non vide car contient $\int_a^b M$ et est minorée par $\int_a^b m = m(b-a)$ donc B admet une borne inférieure.

• Montrons enfin que $\sup(A) = \inf(B)$.

Tout d'abord, si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, alors $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$ par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier. Ceci signifie que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.

Si on fixe $b \in B$, alors pour tout $a \in A, a \leq b$ donc b est un majorant de A , ce qui implique que $\sup(A) \leq b$.

Ainsi, pour tout $b \in B, \sup(A) \leq b$ donc $\sup(A)$ est un minorant de B , ce qui implique que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme précédent, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

Par définition, on a $\int_a^b \varphi \in A$ donc $\int_a^b \varphi \leq \sup(A)$ et $\int_a^b \psi \in B$ donc $\int_a^b \psi \geq \inf(B)$. Il en découle que $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \geq \inf(B) - \sup(A)$. Or, par linéarité et croissance de l'intégrale des fonctions en escalier,

$$0 \leq \inf(B) - \sup(A) \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi - \varphi \leq \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b-a)$$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers 0, on trouve $\inf(B) - \sup(A) = 0$, i.e. $\sup(A) = \inf(B)$, ce qu'on voulait montrer. ■

Remarque 5. • Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi_n \leq f$ et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f.$$

De même, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite de fonctions en escalier $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, \psi_n \geq f$ et vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n = \int_a^b f$.

Autrement dit, l'idée est d'approcher la courbe de f par des rectangles, situés au-dessus ou en dessous de la courbe de f .

- On montre grâce à cette définition que pour toute fonction f continue sur $[a, b]$,

$$\int_a^b -f = - \int_a^b f.$$

En effet, par linéarité de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a

$$\begin{aligned} - \int_a^b f &= - \sup \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\} \\ &= \inf \left\{ - \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_a^b -\varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), -\varphi \geq -f \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \psi \geq -f \right\} \\ &= \int_a^b -f. \end{aligned}$$

21.1.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Proposition 3: Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

1. (Linéarité) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

2. (Positivité) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

3. (Croissance) Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

4. (Relation de Chasles)

Pour tout $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Démonstration.

1. • Commençons par montrer que $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

On fixe $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \leq f$, $\psi_n \leq g$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n = \int_a^b g$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n + \psi_n \leq f + g$ et $\varphi_n + \psi_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ donc par définition,

$$\int_a^b \varphi_n + \psi_n \leq \int_a^b f + g.$$

Or, par linéarité de l'intégrale d'une fonction en escalier, on $\int_a^b \varphi_n + \psi_n = \int_a^b \varphi_n + \int_a^b \psi_n$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b \varphi_n + \int_a^b \psi_n \leq \int_a^b f + g$.

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b f + g$.

En appliquant la même propriété à $f + g$ et $-g$, on a

$$\int_a^b f + g + \int_a^b -g \leq \int_a^b (f + g) + (-g) = \int_a^b f.$$

Or, on a déjà vu que $\int_a^b -g = -\int_a^b g$ donc $\int_a^b f + g - \int_a^b g \leq \int_a^b f$ d'où $\int_a^b f + g \leq \int_a^b f + \int_a^b g$ et finalement $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

• Montrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

▷ 1er cas : Si $\alpha = 0$, alors $\int_a^b \alpha f = \int_a^b 0 = 0 = 0 \times \int_a^b f = \alpha \int_a^b f$.

▷ 2ème cas : Supposons que $\alpha > 0$.

La suite $(\alpha \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \varphi_n \leq \alpha f$ (puisque $\alpha > 0$) donc $\int_a^b \alpha \varphi_n \leq \int_a^b \alpha f$.

Or, par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \int_a^b \varphi_n = \int_a^b \alpha \varphi_n \leq \int_a^b \alpha f$ et en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\alpha \int_a^b f \leq \int_a^b \alpha f$.

En appliquant la même propriété au réel $\frac{1}{\alpha} > 0$ et à la fonction continue αf , on trouve $\frac{1}{\alpha} \int_a^b \alpha f \leq \int_a^b \frac{1}{\alpha} \alpha f = \int_a^b f$ d'où $\int_a^b \alpha f \leq \alpha \int_a^b f$ (car $\alpha > 0$) et finalement $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

▷ 3ème cas : Supposons que $\alpha < 0$. En appliquant le cas précédent au réel $-\alpha > 0$ et à la fonction continue $-f$ (dont on sait déjà que $\int_a^b -f = -\int_a^b f$), on a

$$\int_a^b \alpha f = \int_a^b (-\alpha)(-f) = -\alpha \int_a^b -f = -(-\alpha) \int_a^b f = \alpha \int_a^b f.$$

Finalement, pour tout réel α , on a $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

• En combinant les deux points précédents, on a pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \int_a^b \alpha f + \int_a^b \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

2. Supposons que $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

Soit φ la fonction constante sur $[a, b]$ égale à $m = \min_{t \in [a, b]} f(t) \geq 0$. La fonction φ est en escalier sur $[a, b]$ et vérifie $\varphi \leq f$.

Par définition, on a alors $\int_a^b f \geq \int_a^b \varphi = m(b-a) \geq 0$.

3. Par hypothèse, on a $g - f \geq 0$ sur $[a, b]$ et $g - f$ continue sur $[a, b]$ donc par positivité de l'intégrale, on a $\int_a^b g - f \geq 0$. Or, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b g - f = \int_a^b g - \int_a^b f$ donc $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$, i.e. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
4. Soit $c \in [a, b]$. D'après le lemme, on peut trouver une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) - \frac{1}{n} \leq \varphi_n(x) \leq f(x). \quad (*)$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \leq \int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Puisque la double inégalité $(*)$ est valable sur $[a, b]$, elle est également valable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, ce qui permet d'obtenir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b \varphi_n(x)dx = \int_c^b f(x)dx$.

Or, d'après la relation de Chasles pour l'intégrale de fonctions en escalier, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^c \varphi_n + \int_c^b \varphi_n = \int_a^b \varphi_n.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. ■

Remarque 6. On retrouve de nouveau à partir de la relation de Chasles que $\int_a^a f = 0$.

Définition 4: Extension de la notation

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$, avec $a \leq b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

On définit

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Remarque 7. • Ceci est cohérent avec la relation de Chasles : en effet, on a alors

$$\int_a^b f + \int_b^a f = 0 = \int_a^a f.$$

La relation de Chasles est donc valable quelque soit l'ordre des bornes.

- La linéarité de l'intégrale est valable quelque soit l'ordre des bornes : en effet, on a

$$\int_b^a \alpha f + \beta g = - \int_a^b \alpha f + \beta g = -\alpha \int_a^b f - \beta \int_a^b g = \alpha \int_b^a f + \beta \int_b^a g.$$

- En revanche, les propriétés de positivité et de croissance nécessitent d'avoir les bornes dans le bon ordre !

En effet, si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f \geq 0$ donc $\int_b^a f = - \int_a^b f \leq 0$.

Proposition 4

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

Démonstration. • Si f est identiquement nulle sur $[a, b]$, c'est à dire constante égale à 0, on a clairement $\int_a^b f(t)dt = 0$.

- Supposons que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrons que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$, i.e. $f(x_0) > 0$ puisque f est positive.

Puisque f est continue en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$-\frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{f(x_0)}{2}$$

d'où pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_0-\alpha} f(t)dt + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt + \int_{x_0+\alpha}^b f(t)dt.$$

Par positivité de l'intégrale, puisque f est positive sur $[a, b]$ on a $\int_a^{x_0-\alpha} f(t)dt \geq 0$ et $\int_{x_0+\alpha}^b f(t)dt \geq 0$ donc $\int_a^b f(t)dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt$.

Or, puisque pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$, on a par croissance de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{f(x_0)}{2} dt = \frac{f(x_0)}{2} \times (x_0 + \alpha - (x_0 - \alpha)) = \frac{f(x_0)}{2} \times 2\alpha = \alpha f(x_0) > 0.$$

On en déduit que $\int_a^b f(t)dt > 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\int_a^b f(t)dt = 0$.

Ainsi, nécessairement pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) = 0$ et puisque f est continue en a et en b on a $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ et $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0$, ce qui prouve que f est identiquement nulle sur $[a, b]$. ■

Proposition 5: Encadrement de l'intégrale

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. (Inégalité de la moyenne)

Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$.

Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

2. (Inégalité triangulaire intégrale)

On a

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Remarque 8. D'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes donc on a toujours

$$(b-a) \min_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Démonstration.

1. Par hypothèse, on a pour tout $x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt$$

d'où $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

2. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_a^b -|f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$ i.e.

$$-\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt,$$

d'où $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

■

Exemple 1. Puisque pour tout $x \in [0, \pi], -1 \leq \cos(x) \leq 1$, alors $-\pi \leq \int_0^\pi \cos(t)dt \leq \pi$.

21.1.4 Valeur moyenne**Définition 5: Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque 9. C'est la version continue d'une moyenne discrète du type $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.

Exemple 2. • Si une fonction continue f est d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne est 0. Ceci confirme l'intuition géométrique, à savoir que si l'aire négative en dessous de l'axe des abscisses est égale à l'aire positive au-dessus de l'axe des abscisses, alors la valeur moyenne de la fonction est nulle.

• Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $\frac{1}{b-a} \int_a^b k dt = k$ donc la valeur moyenne d'une fonction constante égale à k est k .

• Soit $a \geq 0$. Soit $f : \begin{matrix} [0, a] \\ x \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathbb{R} \\ x \end{matrix}$. On a vu que $\int_0^a f(t) dt = \frac{a^2}{2}$ donc la valeur moyenne de f sur $[0, a]$ est

$$\frac{1}{a-0} \int_0^a f(t) dt = \frac{a}{2}.$$

Théorème 1: Théorème de la valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ appartient à l'image de f , i.e.

$$\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, on a déjà vu que d'après le théorème des bornes atteintes, on a $(b-a) \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$ d'où

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Soient $(m, M) \in [a, b]^2$ tels que $f(m) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $f(M) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Ainsi, $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \in [f(m), f(M)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

il existe c entre m et M , a fortiori $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$. ■

21.2 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I . Soit $a \in I$.

On considère la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

La fonction F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a , i.e.

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F(a) = 0.$$

Démonstration. • Montrons que F est une primitive de f sur I .

Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$, i.e. montrons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$.

★ 1ère démonstration :

D'après la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt - (x - x_0)f(x_0) \right) \\
 &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \\
 &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \\
 &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right).
 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque f est continue en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On déduit du calcul précédent que pour tout $x \in (I \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} |f(t) - f(x_0)| dt \\
 &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} \varepsilon \\
 &\leq \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \varepsilon \\
 &\leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = 0$, i.e. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ et ce pour tout $x_0 \in I$, donc F est bien une primitive de f sur I .

★ 2ème démonstration :

Supposons dans un premier temps que $x > x_0$.

On a

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Puisque f est continue sur $[x_0, x]$, d'après le théorème de la valeur moyenne, il existe $c_x \in [x_0, x]$ tel que

$$f(c_x) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Puisque $x_0 \leq c_x \leq x$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} c_x = x_0$.

Or, par continuité de f en x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ainsi, par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(c_x) = f(x_0)$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

et on en déduit que F est dérivable à droite en x_0 avec $F'_d(x_0) = f(x_0)$.

On montre de même que F est dérivable à gauche en x_0 avec $F'_g(x_0) = f(x_0)$, ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

- Par définition de F , $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.
- Enfin, si G est une primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$, alors pour tout $x \in I$,

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

donc $G - F$ est constante sur I égale à $(G - F)(a) = G(a) - F(a) = 0$ donc $G = F$, d'où l'unicité de F . ■

Remarque 10. • Ainsi, toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (une infinité, égales à une constante additive près). Ceci légitime la définition de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{dt}{t}$ comme l'unique primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

- Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si $a \in I$, alors

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

En effet, la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)$ est l'unique primitive de f' sur I qui s'annule en a .

Plus généralement, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I . Soit F une primitive de f sur I . Alors pour tout $(a, b) \in I^2$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

On note $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

Démonstration. Soit $a \in I$.

La fonction $x \mapsto F(x) - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a donc pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

donc pour tout $b \in I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ et ceci est vrai pour tout $(a, b) \in I^2$. ■

Remarque 11. Ce résultat fondamental permet de calculer facilement des intégrales en utilisant les primitives usuelles.

Exemple 3. • $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

- $\int_0^\pi \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$.

- $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_2^3 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.

- $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^x dx = [e^x]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} - e^{\ln(2)} = 3 - 2 = 1$.

21.3 Méthodes de calculs

21.3.1 Intégration par parties

Proposition 6: Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. Notons que toutes les intégrales existent parce que u, v, u', v' et leurs produits sont bien continues sur $[a, b]$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Or, la fonction uv est une primitive sur $[a, b]$ de $u'v + uv'$ donc

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

$$\text{d'où } \int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt. \quad \blacksquare$$

Exemple 4. • Calculons $\int_0^1 te^t dt$. Pour cela, effectuons une intégration par parties en posant $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = e^t$ et $v(t) = e^t$. On a alors

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

• L'intégration par parties est une méthode efficace pour déterminer des primitives.

Par exemple, déterminons la primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \arctan(t)dt$.

Posons $u(t) = \arctan(t), u'(t) = \frac{1}{1+t^2}, v'(t) = 1$ et $v(t) = t$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = [t \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan(x) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^x = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ est l'unique primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

21.3.2 Changement de variable

Théorème 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$.

Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Démonstration.

Notons que puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, la fonction φ' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et par composition, la fonction $f \circ \varphi$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ donc par produit, la fonction $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ d'où l'existence de l'intégrale de droite.

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I (F existe d'après le théorème fondamental de l'analyse puisque f est continue sur I).

La fonction $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ par composition de fonctions dérivables et pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, $(F \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$.

On a donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = [F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

■

Remarque 12. • On n'a pas nécessairement $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$.

• En pratique, quand on effectue un changement de variable pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ en posant $x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$ où φ est bijective d'un intervalle I sur $[a, b]$, on a $dx = \varphi'(t)dt$.

Si $x = a, t = \varphi^{-1}(a)$, si $x = b, t = \varphi^{-1}(b)$, on remplace x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t)$ et on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

ce qui correspond à la formule ci-dessus en remplaçant α par $\varphi^{-1}(a)$ et β par $\varphi^{-1}(b)$.

• En pratique, quand on effectue un changement de variable pour calculer $\int_a^b f(\varphi(t))dt$, où $\varphi : [a, b] \rightarrow \varphi([a, b])$ est bijective, on pose $x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$ d'où "en dérivant", $dt = (\varphi^{-1})'(x)dx$.

Si $t = a, x = \varphi(a)$, si $t = b, x = \varphi(b)$, on remplace $\varphi(t)$ par x , dt par $(\varphi^{-1})'(x)dx$ et on obtient

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)dx.$$

Cette recette est justifiée car en appliquant le théorème, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} ((f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})(x)(\varphi^{-1})'(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(a))}^{\varphi^{-1}(\varphi(b))} f \circ \varphi(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))dt.$$

Exemple 5. • Calculons $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Posons $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ sur $[0, \pi]$. D'après le théorème, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\cos(\pi)}^{\cos(0)} \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2(x)} \cos'(x) dx \\
 &= \int_{\pi}^0 \sqrt{\sin^2(x)} (-\sin(x)) dx \\
 &= \int_0^{\pi} |\sin(x)| \sin(x) dx \\
 &= \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx \quad (\text{car pour tout } x \in [0, \pi], \sin(x) \geq 0) \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos(2x) dx \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} [\sin(2x)]_0^{\pi} \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

• Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculons $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$.

On a $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = \int_0^a \frac{1}{a^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx$.

Posons $u = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = au$ d'où $dx = a du$.

Ainsi, $\int_0^a \frac{1}{a^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{a^2} \frac{a du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4a}$.

• Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)} dt$.

On pose $u = \sin(t)$ d'où $du = \cos(t) dt$ et ainsi $\frac{dt}{\cos(t)} = \frac{du}{\cos^2(t)} = \frac{du}{1-u^2}$. Par ailleurs, quand $t = 0, u = 0$ et quand $t = \frac{\pi}{4}, u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1-u)(1+u)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{2} [\ln(1+u) - \ln(1-u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)} dt &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \ln \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\ln(2 + \sqrt{2}) - \ln(2 - \sqrt{2}) \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln((\sqrt{2} + 1)^2) = \ln(\sqrt{2} + 1).
 \end{aligned}$$

Corollaire 2: Intégrale d'une fonction paire ou impaire

Soit $a \geq 0$. Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
2. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Démonstration.

1. Supposons f paire et continue sur $[-a, a]$ et calculons $\int_{-a}^a f(t)dt$. D'après la relation de Chasles, on a $\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, ($du = -dt$), on trouve

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du$$

par parité de f .

Ainsi,

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(u)du + \int_0^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt.$$

2. Supposons f impaire et continue sur $[-a, a]$ et calculons $\int_{-a}^a f(t)dt$. D'après la relation de Chasles, on a $\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, ($du = -dt$), on trouve

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du = \int_0^a -f(u)du = - \int_0^a f(u)du$$

par imparité de f et linéarité de l'intégrale.

Ainsi,

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = - \int_0^a f(u)du + \int_0^a f(t)dt = 0.$$

■

Exemple 6. • $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 2[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)dt = 0$.
- $\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
- $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.

Corollaire 3: Intégrale d'une fonction périodique

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.

1. Pour tout $(a, b) \in I^2$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
2. Si $I = \mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Démonstration.

1. Soient $(a, b) \in I^2$, soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque f est continue sur $[a, b]$ et que f est T -périodique, alors f est continue sur $[a + nT, b + nT]$ et on a par T -périodicité de f ,

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_{a+nT}^{b+nT} f(t - nT)dt.$$

Posons $u = t - nT$, d'où $du = dt$. On en déduit

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t - nT)dt = \int_a^b f(u)du$$

$$\text{d'où } \int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n = \left\lfloor \frac{a}{T} + 1 \right\rfloor$. On a alors $\frac{a}{T} < n \leq \frac{a}{T} + 1$ d'où $a < nT \leq a + T$.

$$\text{Ainsi, d'après la relation de Chasles, } \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{a+T} f(t)dt.$$

$$\text{D'après le premier alinéa, on a } \int_a^{nT} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^{nT-(n-1)T} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^T f(t)dt.$$

$$\text{De même, } \int_{nT}^{a+T} f(t)dt = \int_{nT-nT}^{a+T-nT} f(t)dt = \int_0^{a-(n-1)T} f(t)dt.$$

De nouveau d'après la relation de Chasles, on en déduit

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{a+T} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^T f(t)dt + \int_0^{a-(n-1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

■

Exemple 7. • $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \tan(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = [-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} \cos(t)dt = \int_0^{2\pi} \cos(t)dt = [\sin(t)]_0^{2\pi} = 0.$

21.4 Sommes de Riemann

21.4.1 Convergence des sommes de Riemann

Définition 6: Suite des sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un segment $[a, b]$.

On appelle suite des sommes de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$ la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Remarque 13. Concrètement, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on découpe le segment $[a, b]$ en n segments de longueurs égales à $\frac{b-a}{n}$, $\left[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right]$ pour $0 \leq k \leq n-1$, et on calcule la moyenne des valeurs de la fonction en les premiers points de chacun de ces segments, i.e.

$$S_n = \frac{1}{n} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) \right).$$

L'importance des sommes de Riemann est justifiée par le théorème suivant :

Théorème 4: Convergence des sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.

Alors la suite des sommes de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$ est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Remarque 14. Autrement dit, la suite des sommes de Riemann, dont le terme général est la moyenne de n valeurs prises par la fonction f , converge vers la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Démonstration. On admet le théorème dans le cas général. Montrons-le dans le cas où f est L -lipschitzienne pour $L > 0$, i.e. pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} f(t) dt - \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) dt \right| \text{ (Chasles)} \\
 &= \frac{1}{b-a} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right) dt \right| \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\
 &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right) dt \right| \text{ (inégalité triangulaire)} \\
 &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left| f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| dt \text{ (inégalité triangulaire intégrale).} \\
 &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} L \left| t - \left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| dt \quad (fL\text{-lipschitzienne}) \\
 &\leq \frac{L}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{b-a}{n}} u du \quad \left(\text{changement de variable } u = t - \left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right) \\
 &\leq \frac{nL}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
 &\leq \frac{L(b-a)}{2n}.
 \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L(b-a)}{2n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = 0$ par comparaison d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

■

Remarque 15. On a ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a)}{n} = 0$, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

De même, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b)}{n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{f(b)}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

On a donc également

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

21.4.2 Exemples d'application

Le théorème de convergence des sommes de Riemann est très utile pour calculer des limites de suites a priori compliquées à partir d'intégrales qu'on sait calculer facilement.

- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, avec $a = 0$ et $b = 1$.

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

- On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n^n} \prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n > 0$ et

$$\ln(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

avec $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = \ln(x)$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(S_n) = \int_1^2 \ln(t) dt = [x \ln(x) - x]_1^2 = 2 \ln(2) - 2 + 1 = \ln(4) - 1$, donc par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^{\ln(4)-1} = \frac{4}{e}.$$

21.5 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 5: Formule de Taylor avec reste intégral (non exigible)

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

Alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Démonstration. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$ » et montrons $\mathcal{P}(n)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(0+1)}(t)}{0!}(x-t)^0 dt$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

●**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I . A fortiori f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I , alors $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On peut donc réaliser une intégration par parties en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t)$, $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$, $v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ donc on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. ■

Théorème 6: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$.

Alors pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Soit $x \in I$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right|.$$

● Si $x \geq a$, on a

$$\left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leq \int_a^x \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!} |x-t|^n dt \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{M}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x$$

$$\text{d'où } \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leq \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Si $x \leq a$, on a

$$\left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \leq \int_x^a \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!} |x-t|^n dt \leq \frac{M}{n!} \int_x^a (t-x)^n dt = \frac{M}{n!} \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_x^a$$

$$\text{d'où } \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \leq \frac{M(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans tous les cas, on a bien

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

■

Remarque 16. Si I est un segment, puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , alors $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment I et on déduit du théorème des bornes atteintes que $f^{(n+1)}$ y est bornée, ce qui assure l'existence du réel M dans le cas où I est un segment.

Exemple 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{120}.$

21.6 Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$

Dans toute cette section, on considère $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ où $[a, b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}$ et f est continue sur le segment $[a, b]$. On sait qu'on a alors $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$ où $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs réelles.

Définition 7: Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On définit $\int_a^b f$ par

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f).$$

Remarque 17. • Notons que par définition,

$$\operatorname{Re} \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f).$$

• La plupart des propriétés vues ci-dessus pour l'intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles restent valables, par exemple la linéarité.

Proposition 7: Linéarité de l'intégrale pour des fonctions à valeurs complexes

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Démonstration. Posons $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \alpha' + i\beta'$ avec $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{R}^4$.

On a alors

$$\begin{aligned}\lambda f + \mu g &= (\alpha + i\beta)(\operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)) + (\alpha' + i\beta')(\operatorname{Re}(g) + i\operatorname{Im}(g)) \\ &= (\alpha\operatorname{Re}(f) - \beta\operatorname{Im}(f) + \alpha'\operatorname{Re}(g) - \beta'\operatorname{Im}(g)) + i(\beta\operatorname{Re}(f) + \alpha\operatorname{Im}(f) + \beta'\operatorname{Re}(g) + \alpha'\operatorname{Im}(g)).\end{aligned}$$

Par définition, on a alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f + \mu g &= \int_a^b \alpha\operatorname{Re}(f) - \beta\operatorname{Im}(f) + \alpha'\operatorname{Re}(g) - \beta'\operatorname{Im}(g) + i \int_a^b \beta\operatorname{Re}(f) + \alpha\operatorname{Im}(f) + \beta'\operatorname{Re}(g) + \alpha'\operatorname{Im}(g) \\ &= (\alpha + i\beta) \left(\int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) \right) + (\alpha' + i\beta') \left(\int_a^b \operatorname{Re}(g) + i \int_a^b \operatorname{Im}(g) \right) \\ &= \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.\end{aligned}$$

■

Remarque 18. Evidemment, la relation de Chasles, l'intégration par parties, le changement de variable, le théorème fondamental de l'analyse, la convergence des sommes de Riemann restent également valable. En revanche, les propriétés de positivité et de croissance n'ont plus de sens sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8: Majoration du module de l'intégrale

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur le segment $[a, b]$.

Alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration. Soit $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ tels que $\int_a^b f(x) dx = \rho e^{i\theta}$.

Alors

$$\rho = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(x) e^{-i\theta} dx \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x) e^{-i\theta}) dx \leq \int_a^b |\operatorname{Re}(f(x) e^{-i\theta})| dx.$$

Or, $|\operatorname{Re}(f(x) e^{-i\theta})| \leq |f(x) e^{-i\theta}| = |f(x)|$ et on en conclut que

$$\rho = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

■

Remarque 19. Grâce à cette inégalité, on montre l'inégalité de Taylor-Lagrange comme dans le cas réel.