

Liste d'exercices n°21

Intégration

Exercice 1.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $t \mapsto \frac{t+7}{t^2+2t-3}$.
2. Trouver deux réels a et b tels que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on ait

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3}.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-2}^0 \frac{t+7}{t^2+2t-3} dt.$$

Exercice 2.

Trouver une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}.$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^\pi \cos^2(2t) dt$
2. $\int_0^\pi \sin^3(t) dt$
3. $\int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt$
4. $\int_0^\pi \cos^2(t) \sin^4(t) dt$

Exercice 4.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G: x \mapsto \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x^2+1} f(t) dt.$$

Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5.

Calculer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Exercice 6.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x^3 e^{3x} dx$
2. $\int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx$
3. $\int_0^1 t^2 \arctan(t) dt$

Exercice 7.

Trouver une primitive des fonctions suivantes.

$$1. x \mapsto \ln^2(x)$$

$$2. t \mapsto \sin(\sqrt[3]{t})$$

$$3. t \mapsto t \ln(t).$$

$$4. x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$$

$$5. (a) t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$$

$$(b) x \mapsto \sqrt{9 - 4x^2}$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- Supposons que f est impaire. Montrer que F est paire.
- Supposons que f est paire. Montrer que F est impaire si et seulement si $F(0) = 0$.
- Supposons que f est T -périodique avec $T > 0$. Montrer que F est T -périodique si et seulement si $F(T) = F(0)$ (ce qui équivaut à dire que $\int_0^T f(x)dx = 0$).

Exercice 9.

Considérons les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt.$$

- A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $C = S$.
- Calculer $C + S$, puis en déduire les valeurs de C et de S .
- Considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1 - t^2}}.$$

- Vérifier que l'intégrale I est bien définie.
- A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale I .

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes.

$$1. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx$$

On pourra faire le changement de variable $u = \cos(x)$.

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx$$

On pourra faire le changement de variable $u = \sin(x)$.

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes.

$$1. \int_{-1}^1 \frac{t^3}{1 + t^2 + t^4} dt$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin(\theta)} d\theta, \text{ avec le changement de variable } t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$3. \int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx, \text{ avec le changement de variable } u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 13. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$.
Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 14. Calculer les limites, si elles existent, des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) ;$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \sum_{k=1}^n \left(2 + \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)^2 .$

Exercice 15. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \ln \left(\frac{b}{a} \right) .$$