

Corrigé de la liste d'exercices n°20

Analyse asymptotique

Exercice 1

1. $e^x + \cos(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$
2. $\ln(1+x) + \sin(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$
3. $\cos(x) \sin(x) = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$
4. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2).$

Par primitivation, on obtient le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\arctan$:

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$5. \ln(\cos(x)) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

6.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{6}(-x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + o(x^3). \end{aligned}$$

$$7. \frac{\cos^2(x)}{3+x^2} = \frac{1}{3} \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))^2}{1 + \frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3} (1 - x^2 + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{3} + o(x^3) = \frac{1}{3} - \frac{4x^2}{9} + o(x^3).$$

8.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right)^2 - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{16} - 1 + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{17x^4}{240} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{720} + o(x^3). \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} \\
&= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3).
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}\right)^2 &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)^2 \\
&= 1 + \frac{x^2}{4} + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\
&= 1 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x) \sin(x)}{x} &= \frac{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))}{x} \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Puisque $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 5, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 5}{=} \exp(5) + \exp'(5)(x-5) + \frac{\exp''(5)}{2!}(x-5)^2 + o((x-5)^2) \underset{x \rightarrow 5}{=} e^5 + e^5(x-5) + \frac{e^5}{2}(x-5)^2 + o((x-5)^2).$$

2. Posons $x = 1 + h \Leftrightarrow h = x - 1$. Quand x tend vers 1, alors h tend vers 0 et on a

$$\begin{aligned}\cos(\ln(x)) &\underset{x \rightarrow 1}{=} \cos(\ln(1+h)) \\&\underset{h \rightarrow 0}{=} \cos\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right) \\&\underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)^2 + o(h^3) \\&\underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o(h^3) \\&\underset{x \rightarrow 1}{=} 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3).\end{aligned}$$

3. Puisque $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

d'où

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

Exercice 3

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^4$ au voisinage de 0, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4)$$

et

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $g''(0) = 4$ et $f^{(4)}(0) = 120$.

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
 fg(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4))(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4)) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 3x^3 + 6x^4 + 4x^4 + o(x^4) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 + o(x^4).
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 - 5x^4 + (2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 - 8x^3 - 36x^4 + 16x^4 + o(x^4) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x - 3x^2 - 12x^3 - 25x^4 + 4x^2 + 9x^4 + 12x^3 + 16x^4 + o(x^4) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x + x^2 + o(x^4).
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{f(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4))(1 - 2x + x^2 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - 2x^2 + x^3 + 2x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 3x^3 - 6x^4 + 4x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^4).\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}f(g(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} f(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4) + 3(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4)^2 + 4(x^3 + 6x^4) + 5x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 3(x^2 + 4x^4 + 4x^3 + 6x^4) + 4x^3 + 24x^4 + 5x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 7x^2 + 22x^3 + 67x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 - \frac{1}{2}(2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 + \frac{1}{3}(8x^3 + 36x^4) - 4x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + 3x^2 + \frac{20}{3}x^3 + 13x^4 - \frac{1}{2}(4x^2 + 9x^4 + 12x^3 + 16x^4) + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4).\end{aligned}$$

(f) Notons F la primitive de f qui s'annule en 0. Par primitivation, on obtient un développement limité d'ordre 5 en 0 de F :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

3. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Or, on ne connaît pas le développement limité (s'il existe !) de g en 1. On ne peut donc pas déterminer de développement limité de $g \circ f$ en 0.

4.

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \frac{1}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} (1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 + (2x + 3x^2 + 4x^3)^2 - (2x + 3x^2 + 4x^3)^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} (1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 12x^3 - 8x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - 2 + x + o(x^2).\end{aligned}$$

5. (a) $\frac{x}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x + x^2 + o(x^3)$.

(b) Pour pouvoir obtenir un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{x}{g(x)}$, il aurait fallu connaître un développement limité à l'ordre 5 en 0 de g .

6. (a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^4$ au voisinage de 0, f' est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0. La formule de Taylor-Young nous permet donc de donner le développement limité de f' en 0 à l'ordre 3, et non à l'ordre 4.
- (b) D'après la première question,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $f'(0) = 2$, $f''(0) = 6$, $f^{(3)}(0) = 24$ et $f^{(4)}(0) = 120$.

D'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de f' à l'ordre 3 en 0 est

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f'(0) + f''(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{6}x^3 + o(x^3) = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + o(x^3).$$

7. Soit $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la bijection réciproque de f .

D'après le développement limité de f , on sait que $f(0) = 1$, ou encore $f^{-1}(1) = 0$. Il s'agit donc de donner un développement de f^{-1} en 1 à l'ordre 1.

Par ailleurs, on sait que f^{-1} admet un développement limité d'ordre 1 en 1 si et seulement si f^{-1} y est dérivable.

Or, f^{-1} est dérivable en 1 car $f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = 2 \neq 0$ et on a donc

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le développement limité de f^{-1} en $f(0)$ à l'ordre 1 est

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x - 1) + o(x - 1) = \frac{1}{2}(x - 1) + o(x - 1).$$

Exercice 5

- 1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \frac{1}{x} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - 1 \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1 \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

- 2.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left(\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left(\frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left(\frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left(-\frac{1}{6} + o(1) \right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1 + x^3} - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\sin(\frac{x^3}{6} + o(x^3))}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + o(1)}{3 + o(1)} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1 + x^3} - 1} = \frac{1}{3}.$$

4. Tout d'abord, on a $\sin^4(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + o(x^4)$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(x(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3))) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}(x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4))^3 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}(x^3 - 3x^4) + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + (x - \frac{x^3}{6})^2 - (x - \frac{x^3}{6})^3 + (x - \frac{x^3}{6})^4 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{3} - x^3 + x^4 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 - \frac{5x^4}{6} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sin^4(x)} \left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} \right] \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^4(x)} \left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} \right] = \frac{1}{6}.$$

Exercice 6

Posons $x = 1 + h \Leftrightarrow h = x - 1$. Quand x tend vers 1, h tend vers 0 et on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(1+x) - \ln(2)}{x^2 \ln(x)} &\stackrel{x \rightarrow 1}{=} \frac{\ln(2+h) - \ln(2)}{(1+h)^2 \ln(1+h)} \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{\ln(\frac{2+h}{2})}{(1+2h+h^2)(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3))} \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{\ln(1 + \frac{h}{2})}{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + 2h^2 - h^3 + h^3 + o(h^3)} \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)}{h + \frac{3h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)} \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2)}{1 + \frac{3h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)} \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2) \right) \left(1 - \frac{3h}{2} - \frac{h^2}{3} + \left(\frac{3h}{2} + \frac{h^2}{3} \right)^2 + o(h^2) \right) \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2) \right) \left(1 - \frac{3h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{9h^2}{4} + o(h^2) \right) \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2) \right) \left(1 - \frac{3h}{2} + \frac{23h^2}{12} + o(h^2) \right) \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{3h}{4} + \frac{23h^2}{24} - \frac{h}{8} + \frac{3h^2}{16} + \frac{h^2}{24} + o(h^2) \\
 &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{7h}{8} + \frac{19h^2}{16} + o(h^2) \\
 &\stackrel{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{2} - \frac{7}{8}(x-1) + \frac{19}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2)
 \end{aligned}$$

La courbe admet donc en 1 une tangente d'équation $y = -\frac{7}{8}x + \frac{11}{8}$ et est située au-dessus de cette tangente au voisinage de 1.

Exercice 7

1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &\stackrel{x \rightarrow 0}{=} \frac{3}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) \right) - (1 + x^2 + o(x^2)) \\
 &\stackrel{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).
 \end{aligned}$$

2. Au voisinage de 0, on a $f(x) \geq 2 = f(0)$ donc f admet un minimum local en 0.

3. Ce n'est pas un minimum global puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 8

1. • Résolvons (E) sur $]0, +\infty[$.

On considère alors l'équation $(E') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = x^2$.

Soit $(H') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_{H'} = \{y : x \mapsto \lambda e^{-x+2\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On remarque que $x \mapsto x^2$ est une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\mathcal{S}_{E'} = \{y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x} + x^2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Résolvons (E) sur $] -\infty, 0[$.

On considère alors l'équation $(E'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = -x^2$.

Soit $(H'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_{H''} = \{y : x \mapsto \mu e^{x-2\ln(x)}, \mu \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \mu \frac{e^x}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

On cherche une solution particulière de (E'') sur $\mathbb{R}_-^*$ sous la forme $y(x) = \lambda(x) \frac{e^x}{x^2}$ où $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \forall x < 0, y'(x) + \left(\frac{2}{x} - 1\right)y(x) &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x) \frac{e^x}{x^2} + \lambda(x) \frac{e^x}{x^2} - 2\lambda(x) \frac{e^x}{x^3} + 2\lambda(x) \frac{e^x}{x^3} - \lambda(x) \frac{e^x}{x^2} &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x) &= -x^4 e^{-x}. \end{aligned}$$

On cherche une primitive λ sous la forme $\lambda(x) = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + t)e^{-x}$ où $(a, b, c, d, t) \in \mathbb{R}^5$.

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \forall x < 0, \lambda'(x) &= -x^4 e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - t)e^{-x} &= -x^4 e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, -ax^4 + (4a - b)x^3 + (3b - c)x^2 + (2c - d)x + d - t &= -x^4 \end{aligned}$$

d'où par identification

$$\begin{cases} -a = -1 \\ 4a - b = 0 \\ 3b - c = 0 \\ 2c - d = 0 \\ d - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 12 \\ d = 24 \\ t = 24 \end{cases}$$

donc on peut considérer $\forall x < 0, \lambda(x) = (x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24)e^{-x}$.

Ainsi, pour tout $x < 0, y(x) = x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}$.

Finalement, $\mathcal{S}_{E''} = \{y : x \mapsto \mu \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit y dérivable sur $\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda x^2 e^{-x} + x^2 \\ y(0) = 0 \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \mu \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}. \end{cases}$$

Puisque y est dérivable sur $\mathbb{R}$, a fortiori y est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0. On doit donc avoir $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y(0) = 0$.

On a bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$.

Cherchons $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$.

Faisons un développement limité de y en 0.

On a

$$\begin{aligned} y(x) &= \mu \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2} \\ &= \frac{\mu+24}{x^2} + \frac{\mu+24}{x} + \frac{\mu+24}{2} + o(1) + 4x + x^2 \\ &= \frac{\mu+24}{x^2} + \frac{\mu+24}{x} + \frac{\mu+24}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$ si et seulement si $\mu = -24$. On remarque qu'avec cette valeur de μ , y admet le même développement limité d'ordre 1 à gauche et à droite de 0 (à savoir $y(x) = o(x)$) donc y est également dérivable en 0 (avec $y'(0) = 0$).

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions y telles que

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0, y(x) = \lambda x^2 e^{-x} + x^2 \\ \forall x < 0, y(x) = -24 \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}. \end{cases}$$

Exercice 9

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Or, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $n \ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} 1$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

Par composition de limites, on trouve finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

2. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n^2-1} - n = n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 \right) \sim n \times \left(-\frac{1}{2n^2} \right) = -\frac{1}{2n}.$$

Finalement, par produit, on obtient

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) (\sqrt{n^2-1} - n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2},$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) (\sqrt{n^2-1} - n) = 0$.

3. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$, on a $\tan\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

D'autre part, on a $\sqrt{\cos(\frac{1}{n})} - 1 = \sqrt{1 + \cos(\frac{1}{n}) - 1} - 1$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0$ donc $\sqrt{1 + \cos(\frac{1}{n}) - 1} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^2}$.

Par quotient, on en déduit que $\frac{\sqrt{\cos(\frac{1}{n})} - 1}{\tan\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{4}$.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = -n^{\frac{10}{3}}(-n^{-\frac{5}{6}} + 1 - n^{-\frac{16}{3}}).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^{-\frac{5}{6}} + 1 - n^{-\frac{16}{3}} = 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -n^{\frac{10}{3}}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 10

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right) \sim \sqrt{n} \frac{2}{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$, d'où par composition de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. En particulier, $u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n^3 - 1 + n^2}{n^2 + 1} = \frac{n^3(1 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = n \times \frac{1 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$, on en déduit que $\frac{n^3 - 1 + n^2}{n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} n$.

D'autre part, $\ln(1 + n^4) = \ln(n^4(1 + \frac{1}{n^4})) = \ln(n^4) + \ln(1 + \frac{1}{n^4}) = 4 \ln(n) \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^4})}{4 \ln(n)}\right)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^4}) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \ln(n) = +\infty$ donc par somme et quotient, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^4})}{4 \ln(n)} = 1$, d'où $\ln(1 + n^4) \underset{+\infty}{\sim} 4 \ln(n)$.

Par produit, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} 4n \ln(n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1\right)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = 0$, on en déduit que $\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$.

Or, $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Ainsi, $\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

5. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n!}\right) = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n!}\right)\right) = \ln(1 + \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1 = 0$.

On en déduit que $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n!}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n!^2}$.

Il en découle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(\frac{n}{n!}\right)^2 = -\frac{1}{2(n-1)!^2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2(n-1)!^2} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 2$ donc $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 2$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction f_n définie sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \tan(x) - x$. La fonction f_n est dérivable sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ de dérivée pour tout $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$,

$$f'_n(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x).$$

Pour tout $x \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, $f'_n(x) > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

Par ailleurs, $f_n(n\pi) = \tan(n\pi) - n\pi = -n\pi \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} f_n(x) = +\infty$.

Puisque f_n est continue et strictement croissante sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$f_n(x_n) = \tan(x_n) - x_n = 0$$

i.e. il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n\pi \leq x_n < n\pi + \frac{\pi}{2} < (n+1)\pi \leq x_{n+1}$ donc

la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\pi \leq x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $1 \leq \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$.

Ceci implique que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

Puisque $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n - n\pi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et par π -périodicité de $\tan$

$$\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$$

donc $x_n - n\pi$ est l'unique réel de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x_n , autrement dit :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.

D'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Or, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - n\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x_n) = \frac{\pi}{2}$.

A fortiori, $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $x_n \geq n\pi > 0$.

Par imparité de la fonction $\tan$, on sait que pour tout $x \notin 0[\frac{\pi}{2}]$,

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

donc

$$\tan\left(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x_n - n\pi)} = -\frac{1}{x_n}.$$

Or, $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ donc $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à $-\frac{1}{x_n}$, d'où, par imparité de $\arctan$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

5. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Or, $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ donc par composition de limites, $\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n}$.

Or, d'après la question 2, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\frac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

On déduit alors de la question précédente que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}$, d'où le développement limité voulu.

Exercice 12

1. Soit $f : x \mapsto e^x + x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_n) = n$, i.e. $e^{u_n} + u_n = n$.

2. Notons f^{-1} la bijection réciproque de f . Puisque f est strictement croissante, f^{-1} aussi et on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) = u_{n+1}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était majorée, elle serait convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$ et on aurait alors $+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} + u_n = e^l + l$, ce qui est absurde.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{u_n} + u_n = n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\ln(e^{u_n} + u_n) = \ln(n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(e^{u_n} + u_n) = \ln(e^{u_n}) + \ln(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}}) = u_n + \ln(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}})$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) = u_n + \ln(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}})$.

Or, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^{u_n}} = 0$ par croissances comparées puis

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}}\right) = 0$ par composition de limites.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}})}{u_n} = 1$, ce qui prouve que $u_n \sim \ln(n)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = u_n - \ln(n)$.

Par hypothèse, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{u_n} + u_n = n$, i.e. $e^{v_n + \ln(n)} + v_n + \ln(n) = n$ d'où $ne^{v_n} + v_n + \ln(n) = n$ puis

$$e^{v_n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{v_n}{n}.$$

Or, puisque $u_n \sim \ln(n)$, on a $v_n = u_n - \ln(n) = o(\ln(n))$ donc

$$e^{v_n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Par croissances comparées, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad \text{car } \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + o(x) \end{aligned}$$

donc finalement,

$$u_n = v_n + \ln(n) = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$