Corrigé de la liste d'exercices n°21 — Intégration

Exercice 1.

1. La fonction est bien définie si $t^2+2t-3\neq 0$, i.e. si $t\notin\{1,-3\}$ donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$.
2. Pour tout $t\in\mathcal{D}$, on a

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+3}\Leftrightarrow\frac{t+7}{t^2+2t-3}=\frac{(a+b)t+3a-b}{t^2+2t-3}\Leftrightarrow t+7=(a+b)t+3a-b.$$

Par identification, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{rcl}a+b&=&1\\3a-b&=&7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}a&=&2\\b&=&-1\end{array}\right..$$

3. D'après la question précédente, on a

$$I=\int_{-2}^{0}\frac{t+7}{t^2+2t-3}dt=\int_{-2}^{0}\left(\frac{2}{t-1}-\frac{1}{t+3}\right)dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$I=2\int_{-2}^{0}\frac{dt}{t-1}-\int_{-2}^{0}\frac{dt}{t+3}=2[\ln(|t-1|)]_{-2}^{0}-[\ln(|t+3|)]_{-2}^{0}=-2\ln(3)-\ln(3)=-3\ln(3).$$

Exercice 2. La fonction $f:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$ est définie sur $[1,+\infty[$.

On a pour tout $x\geqslant 1$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}-\dfrac{\sqrt{x-1}}{2}$.

Une primitive de f sur $[1,+\infty[$ est alors $F:x\mapsto\dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $\cos^2(2t)=\dfrac{\cos(4t)+1}{2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\pi}\cos^2(2t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(4t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

2. On a pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\sin^3(t)=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}(e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it})=-\frac{1}{8i}(2i\sin(3t)-6i\sin(t))=\frac{3\sin(t)-\sin(3t)}{4}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\pi}\sin^3(t)dt=\frac{3}{4}\int_0^{\pi}\sin(t)dt-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin(3t)dt=\frac{3}{4}[-\cos(t)]_0^{\pi}-\frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(3t)}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}.$$

3. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3(t)\sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4\\
&= \frac{1}{128}(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it})(e^{4it}-4e^{2it}+6-4e^{-2it}+e^{-4it})\\
&= \frac{1}{128}(2\cos(7t)-2\cos(5t)-6\cos(3t)+6\cos(t))\\
&= \frac{1}{64}(\cos(7t)-\cos(5t)-3\cos(3t)+3\cos(t)).
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos^3(t)\sin^4(t)dt &= \frac{1}{64}\left(\int_0^\pi \cos(7t)dt - \int_0^\pi \cos(5t)dt - 3\int_0^\pi \cos(3t)dt + 3\int_0^\pi \cos(t)dt\right)\\
&= \frac{1}{64}\left(\left[\frac{\sin(7t)}{7}\right]_0^\pi - \left[\frac{\sin(5t)}{5}\right]_0^\pi - 3\left[\frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^\pi + 3\left[\sin(t)\right]_0^\pi\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\int_0^\pi \cos^3(t)\sin^4(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3(t)\sin^4(t)dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on réalise le changement de variable $u = \pi - t$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3(t)\sin^4(t)dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3(\pi-u)\sin^4(\pi-u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3(u)\sin^4(u)du$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(u)\sin^4(u)du$$

donc $\displaystyle\int_0^\pi \cos^3(t)\sin^4(t)dt = 0$.

4. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^2(t)\sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4\\
&= \frac{1}{64}(e^{2it}+2+e^{-2it})(e^{4it}-4e^{2it}+6-4e^{-2it}+e^{-4it})\\
&= \frac{1}{64}(2\cos(6t)-4\cos(4t)-2\cos(2t)+4)\\
&= \frac{1}{32}\cos(6t)-\frac{1}{16}\cos(4t)-\frac{1}{32}\cos(2t)+\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos^2(t)\sin^4(t)dt &= \frac{1}{32}\int_0^\pi \cos(6t)dt - \frac{1}{16}\int_0^\pi \cos(4t)dt - \frac{1}{32}\int_0^\pi \cos(2t)dt + \frac{1}{16}\int_0^\pi dt\\
&= \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(6t)}{6}\right]_0^\pi - \frac{1}{16}\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^\pi - \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi + \frac{\pi}{16}\\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de l'analyse, F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
D'après la relation de Chasles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x^2+1} f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{x^2+1} f(t)dt - \int_0^{x-1} f(t)dt\right) = \frac{1}{2}(F(x^2+1) - F(x-1)).$$

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \frac{1}{2}(2xF'(x^2+1) - F'(x-1)) = \frac{1}{2}(2xf(x^2+1) - f(x-1)) = xf(x^2+1) - \frac{f(x-1)}{2}.$$

Exercice 5. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$. Puisque la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ et $F(1) = 0$.
On alors

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \lim_{x\to 1}\frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6.

1. Soit $I = \int_0^1 x^3 e^{3x}dx$.
   On réalise une intégration par parties en posant $u(x) = x^3, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 3x^2, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient
   $$I = \left[\frac{1}{3}x^3e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 x^2e^{3x}dx = \frac{e^3}{3} - \int_0^1 x^2e^{3x}dx.$$
   On réalise une nouvelle intégration par parties en posant $u(x) = x^2, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 2x, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient
   $$I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{3}x^2e^{3x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}dx.$$
   Enfin, on effectue une dernière intégration par parties en posant $u(x) = x, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 1, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient
   $$I = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}[e^{3x}]_0^1 = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}.$$

2. Soit $I = \int_0^1 e^{-x}\sin(x)dx$.
   On réalise une intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}, v(x) = \sin(x), u(x) = -e^{-x}, v'(x) = \cos(x)$ et on obtient
   $$I = [-\sin(x)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\cos(x)dx = -\sin(1)e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}\cos(x)dx.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}, v(x) = \cos(x), u(x) = -e^{-x}, v'(x) = -\sin(x)$ et on obtient

$$I = -\sin(1)e^{-1} + [-e^{-x}\cos(x)]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\sin(x)dx = -\sin(1)e^{-1} - e^{-1}\cos(1) + 1 - I$$

d'où

$$2I = 1 - e^{-1}(\cos(1) + \sin(1))$$

et finalement $I = \dfrac{1 - e^{-1}(\cos(1) + \sin(1))}{2}$.

3. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 t^2 \arctan(t)dt$.
On réalise une intégration par parties en posant $u'(t) = t^2, v(t) = \arctan(t), u(t) = \dfrac{t^3}{3}, v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et on obtient

$$I = \left[\frac{t^3\arctan(t)}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^3}{1+t^2} = t \times \dfrac{t^2}{1+t^2} = t\left(1 - \dfrac{1}{1+t^2}\right) = t - \dfrac{t}{1+t^2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^1 tdt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1-\ln(2)}{2}$$

donc

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln(2) - 1}{6}.$$

Exercice 7.

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln^2(t)dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \ln^2(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t), v'(t) = \ln(t), u'(t) = \dfrac{1}{t}, v(t) = t\ln(t) - t$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} F(x) &= [\ln(t)(t\ln(t) - t)]_1^x - \int_1^x (\ln(t) - 1)dt \\ &= \ln(x)(x\ln(x) - x) - \int_1^x \ln(t)dt + x - 1 \\ &= x\ln(x)(\ln(x) - 1) - [t\ln(t) - t]_1^x + x - 1 \\ &= x\ln(x)(\ln(x) - 1) - x\ln(x) + x - 1 + x - 1 \\ &= x\ln(x)(\ln(x) - 2) + 2x - 2. \end{aligned}$$

2. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(\sqrt[3]{t})dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \sin(\sqrt[3]{x})$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On effectue un changement de variables en posant $u = \sqrt[3]{t} \Leftrightarrow t = u^3$ d'où $dt = 3u^2du$. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3\int_0^{\sqrt[3]{x}} u^2\sin(u)du.$$

On effectue une intégration par parties en posant $x(u) = u^2, y'(u) = \sin(u), x'(u) = 2u, y(u) = -\cos(u)$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3[-u^2\cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} + 6\int_0^{\sqrt[3]{x}} u\cos(u)du = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\int_0^{\sqrt[3]{x}} u\cos(u)du.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $x(u) = u, y'(u) = \cos(u), x'(u) = 1, y(u) = \sin(u)$ et on obtient

$$F(x) = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6[u\sin(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} - 6\int_0^{\sqrt[3]{x}}\sin(u)du = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x}) - 6[-\cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}}$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = -3x^{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x}) + 6\cos(\sqrt[3]{x}) - 6$.

3. D'après le théorème fondamental de l'analyse , la fonction $F : x \mapsto \int_1^x t\ln(t)dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

   On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t), v'(t) = t, u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = \frac{t^2}{2}$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$F(x) = \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2}dt = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) + \frac{1}{4}.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5 \neq 0$ car le discriminant de ce trinôme du second degré est strictement négatif. Posons pour tout réel $x, f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 5}$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

   On a pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2 + 4} = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{(\frac{t+1}{2})^2 + 1}$.

   On effectue un changement de variable en posant $u = \frac{t+1}{2}$ d'où $du = \frac{dt}{2}$ ou encore $dt = 2du$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} \frac{2du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2}[\arctan(u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} = \frac{\arctan(\frac{x+1}{2}) - \arctan(\frac{1}{2})}{2}.$$

5. (a) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'unique primitive de f sur $[-1, 1]$ qui s'annule en 0 est $F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - t^2}dt$.

   On effectue le changement de variable $u = \arccos(t) \Leftrightarrow t = \cos(u)$ d'où $dt = -\sin(u)du$.

   Ainsi, on a pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x)} -\sqrt{1 - \cos^2(u)}\sin(u)du = \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(u)}\sin(u)du.$$

   Or, pour tout $x \in [-1, 1], \arccos(x) \in [0, \pi]$ et pour tout $u \in [0, \pi], \sin(u) \geqslant 0$ donc $\sqrt{\sin^2(u)} = |sin(u)| = \sin(u)$ d'où pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$F(x) = \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du = \frac{1}{2}\int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2u))du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos(x) - \frac{1}{4}[\sin(2u)]_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}}$$

d'où

$$F(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(2\arccos(x))-\frac{1}{2}\arccos(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x))-\frac{1}{2}\arccos(x)$$

donc finalement pour tout $x\in[-1,1], F(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}\arccos(x)$.

(b) La fonction $g : x\mapsto\sqrt{9-4x^2}$ est définie si $9-4x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$. Ainsi, g est définie et continue sur $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ et d'après le théorème fondamental de l'analyse, $G : x\mapsto\displaystyle\int_0^x\sqrt{9-4t^2}dt$ est l'unique primitive de g qui s'annule en 0.

On a pour tout $x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}], G(x)=3\displaystyle\int_0^x\sqrt{1-\frac{4}{9}t^2}dt$. On effectue un changement de variable en posant $u=\dfrac{2}{3}t$ d'où $du=\dfrac{2}{3}dt$, puis $dt=\dfrac{3}{2}du$ et on obtient pour tout $x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$,

$$G(x)=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{2}{3}x}\sqrt{1-u^2}du=\frac{9}{2}F\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{9\pi}{8}+\frac{3}{2}x\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}-\frac{9}{4}\arccos\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Exercice 8.

1. Supposons que f est impaire.
   Posons pour tout $x\in\mathbb{R}, G(x)=F(x)-F(-x)$.
   La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$G'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x)=0$$
   car f est impaire.
   Ainsi, G est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}, G(x)=G(0)=F(0)-F(0)=0$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}, F(-x)=F(x)$, ce qui implique que F est paire.
2. Supposons que f est paire.
   Posons pour tout $x\in\mathbb{R}, G(x)=F(x)+F(-x)$.
   La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$G'(x)=F'(x)-F'(-x)=f(x)-f(-x)=0$$
   car f est paire.
   Ainsi, G est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}, G(x)=G(0)=F(0)+F(0)=2F(0)$ i.e. pour tout $x\in\mathbb{R}, F(x)+F(-x)=2F(0)$.
   On a donc les équivalences :
   $$F\text{ est impaire}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}, F(x)+F(-x)=0\Leftrightarrow F(0)=0.$$
3. Suppsons que f est T-périodique.
   Posons pour tout $x\in\mathbb{R}, G(x)=F(x+T)-F(x)$.
   La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$G'(x)=F'(x+T)-F'(x)=f(x+T)-f(x)=0$$
   car f est T-périodique.
   Ainsi, G est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}, G(x)=G(0)=F(T)-F(0)$, i.e. pour tout $x\in\mathbb{R}, F(x+T)-F(x)=F(T)-F(0)$.

On a donc les équivalences :

$$F \text{ est } T-\text{périodique} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F(x+T)-F(x)=0 \Leftrightarrow F(T)-F(0)=0 \Leftrightarrow \int_0^t f(x)dx=0.$$

Exercice 9.

1. Tout d'abord, notons que les deux intégrales sont bien définies car pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(t)+\sin(t) \neq 0$. En effet, on a

$$\cos(t)+\sin(t)=0 \Leftrightarrow \cos(t)=-\sin(t) \Leftrightarrow \cos(t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{2}+t[2\pi] \text{ ou } t \equiv -\frac{\pi}{2}-t[2\pi]$$

d'où $t \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui est impossible pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Posons le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ d'où $du = -dt$ dans l'intégrale C. On obtient

$$C = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-u)}{\cos(\frac{\pi}{2}-u)+\sin(\frac{\pi}{2}-u)}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sin(u)+\cos(u)}du = S.$$

2. Par linéarité de l'intégrale, on a $C+S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.

Or, $C=S$ donc $\dfrac{\pi}{2} = C+S = 2C$ d'où $C=S=\dfrac{\pi}{4}$.

3. (a) Tout d'abord, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est bien définie si $1-t^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow t^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow t \in [-1,1]$.
Par ailleurs, vérifions que pour tout $t \in [-1,1], t+\sqrt{1-t^2} \neq 0$. On a

$$t+\sqrt{1-t^2}=0 \Rightarrow \sqrt{1-t^2}=-t \Rightarrow 1-t^2=t^2 \Rightarrow t^2=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or, pour $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, t+\sqrt{1-t^2} = \sqrt{2} \neq 0$ et pour $t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, t+\sqrt{1-t^2}=0$ donc la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est définie sur $[-1,1] \setminus \{-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. A fortiori, elle est définie et continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I est bien définie.

(b) Posons $u = \arcsin(t) \Leftrightarrow t = \sin(u)$ d'où $dt = \cos(u)du$. On obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u)+\sqrt{1-\sin^2(u)}}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u)+\sqrt{\cos^2(u)}}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u)+|\cos(u)|}du.$$

Or, pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(u) \geqslant 0$ donc $|\cos(u)| = \cos(u)$ donc $I = C = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 10. Tout d'abord, notons que les deux intégrales de cet exercice sont bien définies car pour tout réel $x, 3+2\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\dfrac{3}{2} \notin [-1,1]$, ce qui est impossible.

1. On a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{1+4\cos^2(x)}dx$

On pose $u = \cos(x)$ d'où $du = -\sin(x)dx$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)}dx = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+4u^2} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+(2u)^2}.$$

On pose maintenant $t = 2u$, d'où $dt = 2du$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}[\arctan(t)]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \arctan(\sqrt{2})$$

car $\arctan(-\sqrt{2}) = -\arctan(\sqrt{2})$ par imparité de arctan.

2. On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{5-4\sin^2(x)}dx$.
   On pose $u = \sin(x)$ d'où $du = \cos(x)dx$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{5-4u^2}.$$

   Or, pour tout $u \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, on a $\displaystyle\frac{1}{5-4u^2} = \frac{1}{(\sqrt{5}-2u)(\sqrt{5}+2u)} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2u} + \frac{1}{\sqrt{5}-2u}\right)$
   donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)}dx &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5}+2u} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5}-2u}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left[\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2u)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \left[\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}-2u)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \frac{\ln(\sqrt{5}+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{4\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Exercice 11.

1. Notons que l'intégrale est bien définie car pour tout $t \in \mathbb{R}, 1+t^2+t^4 > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^3}{1+t^2+t^4}$ est impaire donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{1+t^2+t^4}dt = 0$.
2. Notons que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}], 1+\sin(\theta) \neq 0$ donc l'intégrale est bien définie.
   Posons $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ d'où $dt = \dfrac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{\theta}{2}))d\theta = \dfrac{1}{2}(1+t^2)d\theta$, i.e. $d\theta = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.
   On sait qu'alors $\sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (cf. TD Trigonométrie) et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sin(\theta)}d\theta = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1+t^2+2t} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

   d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sin(\theta)}d\theta = 2\left(1 - \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = 2 \times \frac{3+\sqrt{3}-3}{3+\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1.$$

3. La fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ est définie sur $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$. En particulier, elle est définie et continue sur $[2, 3]$ donc l'intégrale est bien définie.
   Posons $u = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \Rightarrow u^2 = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)u^2 = x+1 \Rightarrow x = \dfrac{1+u^2}{u^2-1}$ donc

$$dx = \frac{2u(u^2-1) - 2u(1+u^2)}{(u^2-1)^2}du = -\frac{4u}{(u^2-1)^2}du$$

   et on obtient

$$\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{4u^2}{(u^2-1)^2}du = 4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{(u^2-1)^2}du.$$

Réalisons une intégration par parties en posant $x(u) = u, y'(u) = \dfrac{u}{(u^2-1)^2}, x'(u) = 1, y(u) = -\dfrac{1}{2(u^2-1)}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx &= 4\left(\left[-\frac{u}{2(u^2-1)}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2-1}\right)\\
&= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du\right)\\
&= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + [\ln(u-1) - \ln(u+1)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\\
&= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}-1) - \ln(\sqrt{3}+1) - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

Exercice 12. On sait que f est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f est bornée sur le segment $[0,1]$ donc il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in [0,1], |f(x)| \leqslant M$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |I_n| = \left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n |f(x)|dx \leqslant M\int_0^1 x^n dx = M\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0$.
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |I_n| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 13. • Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$, alors l'hypothèse implique que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$ d'où par linéarité de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (|f(x)| - f(x))dx = 0$.
Or, pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant |f(x)|$ donc $|f(x)| - f(x) \geqslant 0$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto |f(x)| - f(x)$ est continue sur $[a,b]$ car f et la fonction valeur absolue le sont.
La fonction $x \mapsto |f(x)| - f(x)$ est donc une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs positives et d'intégrale nulle sur $[a,b]$. On en déduit qu'elle est identiquement nulle sur $[a,b]$, i.e. pour tout $x \in [a,b], |f(x)| - f(x) = 0$ d'où pour tout $x \in [a,b], f(x) = |f(x)|$.
A fortiori, la fonction f est positive sur $[a,b]$.
• Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$, alors l'hypothèse implique que $\displaystyle -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$ d'où par linéarité de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (|f(x)| + f(x))dx = 0$.
Or, pour tout $x \in [a,b], f(x) \geqslant -|f(x)|$ donc $|f(x)| + f(x) \geqslant 0$.
Comme dans le premier cas, la fonction $x \mapsto |f(x)| + f(x)$ est une fonction continue, à valeurs positive et d'intégrale nulle sur $[a,b]$. Elle y est donc identiquement nulle, i.e. pour tout $x \in [a,b], |f(x)| + f(x) = 0$, d'où pour tout $x \in [a,b], f(x) = -|f(x)|$.
A fortiori, la fonction f est négative sur $[a,b]$.
Dans tous les cas, la fonction f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 14.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

où $a=0, b=1$ et $f : x \mapsto x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
On reconnaît une somme de Riemann et puisque f est continue sur $[0,1]$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)x\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{4}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}.$$

2. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n} = 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc par composition, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$ d'où

$$v_n \sim \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

où $a=0, b=\pi$ et $f : x \mapsto (2+\cos(x))^2$. On reconnaît une somme de Riemann et puisque f est continue sur $[0,\pi]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n &= \int_0^\pi (2+\cos(x))^2 dx \\ &= \int_0^\pi (4+4\cos(x)+\cos^2(x))dx \\ &= \int_0^\pi 4dx + \int_0^\pi 4\cos(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi(\cos(2x)+1)dx \\ &= 4\pi + 4[\sin(x)]_0^\pi + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{9\pi}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 15. Pour tout $x>0$, on a $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(bx) - \ln(ax) = [\ln(t)]_{ax}^{bx} = \int_{ax}^{bx}\frac{dt}{t}$ d'où $\int_{ax}^{bx}\frac{\sin(t)}{t^2}dt - \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \int_{ax}^{bx}\frac{\sin(t)-t}{t^2}dt.$
Or, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a pour tout $t>0$: $|\sin(t)-t| \leqslant \frac{t^3}{6}$ donc $\frac{|\sin(t)-t|}{t^2} \leqslant \frac{t}{6}$.
D'après l'inégalité triangulaire intégrale, on a alors

$$\left|\int_{ax}^{bx}\frac{\sin(t)}{t^2}dt - \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right| = \left|\int_{ax}^{bx}\frac{\sin(t)-t}{t^2}dt\right| \leqslant \int_{ax}^{bx}\frac{|\sin(t)-t|}{t^2} \leqslant \int_{ax}^{bx}\frac{t}{6}dt = \frac{(b^2-a^2)x^2}{12} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{\sin(t)}{t^2}dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.