
Petit contrôle du 1er avril 2026

Tous les résultats devront être donnés sous la forme la plus simplifiée possible.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
3. $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx \quad (\text{poser}\, t = \sqrt{x})$.
4. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)}$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}^2(x)} dx$.
6. $\displaystyle\int_1^2 2^x dx$.

Exercice 2

1. Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(|\tan(x)|)$ puis calculer $f'(x)$ lorsque cela a un sens. On exprimera le résultat uniquement en fonction de $\sin$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)}$. On exprimera le résultat en fonction de $\ln(3)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos(x)}$.

Exercice 3

On souhaite déterminer la valeur de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)} dt.$$

1. A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{\tan(t)}$, montrer que

$$I = 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

2. Trouver un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{1+x^4} = a\left(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right).$$

3. En déduire la valeur de I.