
CORRIGÉ DU PETIT CONTRÔLE DU 1ER AVRIL 2026

Exercice 1

1. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin(x)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin(0) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

2. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = [-\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

3. Avec le changement de variable $t = \sqrt{x}$, on a $x = t^2$ d'où $dx = 2tdt$ donc (après intégration par parties)

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 te^t dt = 2 \left([te^t]_1^2 - \int_1^2 e^t dt \right) = 2(2e^2 - e - [e^t]_1^2) = 2(2e^2 - e - e^2 + e) = \boxed{2e^2}$$

4. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2} = \boxed{\ln(2)}$

5. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}^2(x)} dx = [\arctan(\operatorname{ch}(x))]_0^1 = \arctan(\operatorname{ch}(1)) - \arctan(\operatorname{ch}(0)) = \arctan(\operatorname{ch}(1)) - \arctan(1) = \boxed{\arctan(\operatorname{ch}(1)) - \frac{\pi}{4}}$

6. $\int_1^2 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} \right]_1^2 = \boxed{\frac{2}{\ln(2)}}$

Exercice 2

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \right[\cup \left] k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\sin(x) \cos(x)} = \boxed{\frac{2}{\sin(2x)}}$$

2. Posons le changement de variable $t = \frac{x}{2}$, i.e. $x = 2t$ d'où $dx = 2dt$ et on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{\sin(2t)} \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f'(t) dt \\
 &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
 &= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{2} \ln(3)}.
 \end{aligned}$$

3. On a $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}$.

Posons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$. On a alors $dt = -dx$ et d'après la formule de changement de variable, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-dt}{\sin(t)} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)} = \boxed{\frac{1}{2} \ln(3)}.$$

Exercice 3

1. Posons $x = \sqrt{\tan(t)}$. Ainsi, on a $x^2 = \tan(t)$ puis $\arctan(x^2) = \arctan(\tan(t))$. Puisque $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\arctan(\tan(t)) = t$ donc $t = \arctan(x^2)$ et on en déduit que $dt = \frac{2x}{1+x^4} dx$. D'après la formule du changement de variable, on obtient alors

$$I = \int_0^1 x \times \frac{2x}{1+x^4} dx = \boxed{2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4} dx}.$$

2. On cherche un réel a tel que pour tout réel x , $\frac{x^2}{1+x^4} = a \left(\frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right)$.

On a pour tout réel x , $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{1+x^4} &= a \left(\frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) \\
 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a \frac{x(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - x(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{1+x^4} &= \frac{x^2}{1+x^4} \\
 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2a\sqrt{2}x^2 &= x^2.
 \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que $2a\sqrt{2} = 1$ donc $a = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

3. D'après les deux questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \frac{2x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx - \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx - \int_0^1 \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right)
 \end{aligned}$$

Calculons ces quatre intégrales séparément.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - \sqrt{2}x + 1 > 0$ puisque les racines de ce trinôme du second degré sont complexes donc

$$\int_0^1 \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = [\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)]_0^1 = \ln(2 - \sqrt{2}).$$

• De même, on obtient

$$\int_0^1 \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = [\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1)]_0^1 = \ln(2 + \sqrt{2}).$$

• On a

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} dx.$$

Posons le changement de variable $u = \sqrt{2}x - 1$ donc $du = \sqrt{2}dx$ et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = 2 \int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{u^2 + 1} = 2[\arctan(u)]_{-1}^{\sqrt{2}-1} = 2 \arctan(\sqrt{2}-1) - 2 \arctan(-1)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = 2 \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{2}.$$

• De même,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx.$$

Posons le changement de variable $u = \sqrt{2}x + 1$ donc $du = \sqrt{2}dx$ et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}+1} \frac{du}{u^2 + 1} = 2[\arctan(u)]_1^{\sqrt{2}+1} = 2 \arctan(\sqrt{2}+1) - 2 \arctan(1)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = 2 \arctan(\sqrt{2} + 1) - \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln(2 - \sqrt{2}) + 2 \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{2} - \ln(2 + \sqrt{2}) + 2 \arctan(\sqrt{2} + 1) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right) + 2 \arctan(\sqrt{2} - 1) + 2 \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right) \right). \end{aligned}$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc $2 \arctan(\sqrt{2} - 1) + 2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right) = \pi$.

$$\text{Enfin, } \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{2} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

On en conclut que

$$I = \frac{\pi + \ln(3 - 2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}.$$