Lycée Fénelon
Année 2025-2026

PCSI
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°1

Samedi 20 septembre 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, de deux problèmes et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Dans cet exercice, on se propose de montrer l'existence d'un réel x non entier tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Supposons que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$
2. (a) Montrer qu'il existe un entier x non nul tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel x non entier tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
3. Conclure.

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles non vides. On suppose que F contient au moins deux éléments.
Soient A et B deux parties de E.
On rappelle que F^E désigne l'ensemble des applications de E vers F, F^A l'ensemble des applications de A vers F et F^B l'ensemble des applications de B vers F.
On considère l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^A \times F^B \\ f & \longmapsto & (f_{|A}, f_{|B}) \end{array}$$

où $f_{|A}$ et $f_{|B}$ désignent les restrictions de f à A et à B respectivement.

1. Montrer que Φ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que Φ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où Φ est bijective, préciser sa bijection réciproque Φ^{-1}.

Problème 1 : Théorème de Cantor-Bernstein

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant :
$\triangleright$ *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.*

Partie I - Un résultat de point fixe

Soient E un ensemble et $h : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application *croissante au sens de l'inclusion*, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow h(A) \subset h(B).$$

On veut démontrer que h admet au moins un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $h(X) = X$.
On pose $H_1 = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid h(X) \subset X\}$ et $H_2 = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \subset h(X)\}$.

1. Montrer que H_1 et H_2 sont des ensembles non vides.
2. On pose $V = \displaystyle\bigcap_{X \in H_1} X$. Montrer que $h(V) = V$.
3. On pose $W = \displaystyle\bigcup_{X \in H_2} X$. Montrer que $h(W) = W$.
4. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $h(X) = X$. Montrer que $V \subset X \subset W$.

   Autrement dit on a montré que h admet au moins un point fixe, et que V et W sont les minimum et maximum des points fixes de h, au sens de l'inclusion.

Partie II - Démonstration du théorème

Dans cette partie, on considère deux ensembles E et F .
On suppose qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$.

1. On définit l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}(E)} \\ X & \longmapsto & g\left(\overline{f(X)}\right) \end{array}.$$

   Montrer que h est une application croissante au sens de l'inclusion. En déduire que h admet un point fixe qu'on notera M.

2. Montrer que $g\left(\overline{f(M)}\right) = \overline{M}$.

   En déduire que tout élément de $\overline{M}$ a un unique antécédent par g.
3. On définit l'application $\phi : E \to F$ par $\phi(x) = f(x)$ si $x \in M$, et $\phi(x)$ est l'unique antécédent de x par g si $x \in \overline{M}$.
   Montrer que ϕ est une bijection de E dans F et conclure.
4. **Application** : Donner une injection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$, puis une injection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
   En déduire qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$ (qu'on n'essaiera pas de définir).

Problème 2 : Pavages et clans

Dans tout le problème, E désigne un ensemble non vide.
On rappelle que si I est un ensemble, si on considère $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E (où l'indice i parcourt les éléments de l'ensemble I), on a

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E.
- On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.

Partie I : Pavages

Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, c'est à dire $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(E)$. Autrement dit, $\mathcal{P}$ est un ensemble dont les éléments sont des parties de E.
On dit que $\mathcal{P}$ est un *pavage de* E si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, $\left\{ \begin{array}{l} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{array} \right.$.
On dit que le pavage $\mathcal{P}$ est *achevé* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ croissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ (c'est à dire l'ensemble qui ne contient aucune partie de E), $\{\emptyset\}$ (c'est à dire l'ensemble qui contient une seule partie de E, à savoir $\emptyset$) et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages achevés de E.
2. Donner sans démonstration tous les pavages de E si $E = \{a\}$ ou $E = \{a, b\}$.
3. Soit F un ensemble non vide. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
   (a) Soit $\mathcal{Q}$ un pavage de F. Montrer que
   $$f^{-1}(\mathcal{Q}) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{Q}\}$$
   est un pavage de E.
   (b) Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E. Montrer que
   $$f(\mathcal{P}) = \{A \subset F, f^{-1}(A) \in \mathcal{P}\}$$
   est un pavage de F.
4. Dans cette question uniquement, on suppose que E est un ensemble fini.
   (a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de E.
   Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, c'est à dire qu'il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p, A_n = A_p$. En déduire que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p$.
   (b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de E.
   Montrer de même qu'il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p, A_n = A_p$. En déduire que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p$.
   (c) En déduire que tout pavage de E est achevé.

5. Dans cette question uniquement, on suppose que $E = \mathbb{N}$.
   On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels entre 0 et n.
   (a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0, n]\!] = \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $\mathcal{P} = \{[\![0, n]\!], n \in \mathbb{N}\}$ est un pavage non achevé de E.
6. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux pavages de E.
   (a) L'union $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ?
   (b) L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ?
7. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E.
   (a) Montrer que l'ensemble des pavages achevés de E qui contiennent $\mathcal{P}$ est non vide.
   On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'intersection de tous les pavages de cet ensemble.
   (b) Justifier que $\widehat{\mathcal{P}}$ est lui-même un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.
   (c) Réciproquement, montrer que si un pavage achevé contient $\mathcal{P}$, alors il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.
   $\widehat{\mathcal{P}}$ est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.
   On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le *pavage achevé engendré par*$\mathcal{P}$.
   (d) A quelle condition a-t-on $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$?
8. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E. On note
$$\mathcal{P}_m = \{B \subset E, \forall A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}\}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E qui contient $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est achevé, alors $\mathcal{P}_m$ est achevé.

Partie II : Clans

On dit qu'un pavage $\mathcal{P}$ de E est un *clan de E* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E.
2. Donner tous les clans de E si $E = \{a\}$ ou $E = \{a, b\}$.
3. Soit F un ensemble non vide. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $\mathcal{P}$ un clan de E et $\mathcal{Q}$ un clan de F.
   Avec les mêmes notations que celles introduites en question 3 de la partie précédente, montrer que $f^{-1}(\mathcal{Q})$ est un clan de E et que $f(\mathcal{P})$ est un clan de F.
4. Montrer que si $\mathcal{P}$ est un clan de E, alors $\mathcal{P}_m$ est un clan de E.
5. Soit $\mathcal{P}$ un clan de E. Le but de cette question est de montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan de E.
   (a) Soit A une partie de E. On note $\mathcal{E}_A = \{B \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que $\mathcal{E}_A$ est un pavage achevé de E.
   (b) En déduire que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{E}_A$.
   (c) Soit B une partie de E. On note $\mathcal{F}_B = \{A \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E.
   (d) En déduire que si B appartient à $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{F}_B$.
   (e) Conclure.