Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°1

Exercice 1

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{n+2}+x^n+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n+2}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}\right).$$

(b) Montrons par récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

•**Initialisation** : Pour $n=0$, on a bien $x^0+\frac{1}{x^0}=1+1=2 \in \mathbb{Z}$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
Par hypothèse, la propriété est également vraie au rang $n=1$ puisque $x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ et que $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.
Montrons que $x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$.
D'après la question 1, on a

$$x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

Par hypothèse, on a $x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
De plus, par hypothèse de récurrence , on a $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$ et $x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
La somme et le produit d'entiers restant un entier, on a

$$\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$$

d'où $x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve la formule au rang $n+2$ et achève la récurrence.

2. (a) Pour $x=1$, on a bien $x \in \mathbb{Z}$ et $x+\frac{1}{x}=1+1=2 \in \mathbb{Z}$.

(b) On cherche un réel x non nul tel que $x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. On a les équivalences

$$x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x+\frac{1}{x}=k \Leftrightarrow x^2+1=kx \Leftrightarrow x^2-kx+1=0.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, le discriminant du trinôme x^2-kx+1 est $\Delta=k^2-4$.
Prenons par exemple $k=3$.
On a dans ce cas $\Delta=5>0$ donc l'équation $x^2-kx+1=0$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Posons $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Le réel x n'est pas entier et vérifie

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2+4}{2(3+\sqrt{5})} = \frac{18+6\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = 3 \in \mathbb{Z},$$

donc le réel $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ convient.

3. On a trouvé en question précédente un réel x non entier tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
   D'après la question 1, ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. • Montrons l'implication Φ est injective $\Rightarrow A \cup B = E$. Pour cela montrons la contraposée $A \cup B \neq E \Rightarrow \Phi$ n'est pas injective.
   Supposons donc que $A \cup B \neq E$. Puisque $A \cup B \subset E$, ceci implique qu'il existe $\alpha \in E$ tel que $\alpha \in \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, i.e. $\alpha \notin A$ et $\alpha \notin B$.
   Soit $f \in F^E$. Soit $\beta = f(\alpha) \in F$. Par hypothèse, F contient au moins deux éléments donc il existe $\gamma \in F$ tel que $\gamma \neq \beta$.
   Soit $g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si}\, x \neq \alpha \\ \gamma & \text{si}\, x = \alpha \end{cases} \end{array}$.
   En particulier, pour tout $x \in E \setminus \{\alpha\}, f(x) = g(x)$. Puisque $\alpha \notin A$ et $\alpha \notin B$, on a en particulier $f_{|A} = g_{|A}$ et $f_{|B} = g_{|B}$ donc $\Phi(f) = \Phi(g)$ mais $f \neq g$, ce qui prouve que Φ n'est pas injective.
   Par contraposée, on a donc bien montré que si Φ est injective, alors $A \cup B = E$.
   • Montrons l'implication $A \cup B = E \Rightarrow \Phi$ est injective.
   Supposons que $A \cup B = E$. Montrons que Φ est injective.
   Soient $(f,g) \in (F^E)^2$ tels que $\Phi(f) = \Phi(g)$, i.e. $\begin{cases} f_{|A} & = & g_{|A} \\ f_{|B} & = & g_{|B} \end{cases}$
   Soit $x \in E$. Puisque $A \cup B = E$, alors $x \in A$ ou $x \in B$.
   - Si $x \in A$, puisque $f_{|A} = g_{|A}$, on en déduit que $f(x) = g(x)$.
   - Si $x \in B$, puisque $f_{|B} = g_{|B}$, on en déduit que $f(x) = g(x)$.
   Dans les deux cas, $f(x) = g(x)$.
   Ainsi, pour tout $x \in E, f(x) = g(x)$, i.e. $f = g$.
   On a donc montré que $\forall (f,g) \in (F^E)^2, \Phi(f) = \Phi(g) \Rightarrow f = g$, ce qui prouve que Φ est injective.
   On en conclut que $\boxed{\Phi \text{ est injective si et seulement si } A \cup B = E.}$
2. • Montrons l'implication Φ est surjective $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
   Supposons que Φ est surjective.
   Comme dans la question précédente, considérons β et γ deux éléments différents de F.
   Soit $g : A \longrightarrow F$ la fonction constante égale à β et $h : B \longrightarrow F$ la fonction constante égale à γ.
   Alors $(g,h) \in F^A \times F^B$. Par hypothèse, $\Phi : F^E \longrightarrow F^A \times F^B$ est surjective donc il existe $f \in F^E$ tel que $\Phi(f) = (g,h)$, i.e. $f_{|A} = g$ et $f_{|B} = h$.
   S'il existait un élément $x \in A \cap B$, on aurait d'une part $f(x) = f_{|A}(x) = g(x) = \beta$ et d'autre part $f(x) = f_{|B}(x) = h(x) = \gamma$, ce qui est impossible car $\beta \neq \gamma$.

On a donc nécessairement $A \cap B = \emptyset$.

• Montrons l'implication $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Phi$ est surjective.

Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas, E est l'union disjointe des trois parties A, B et $\overline{A \cup B}$, i.e. $E = A \sqcup B \sqcup (\overline{A \cup B})$.

Soient $(g, h) \in F^A \times F^B$. Montrons qu'il existe $f \in F^E$ tel que $\Phi(f) = (g, h)$, i.e. $f_{|A} = g$ et $f_{|B} = h$.

Soit $f : E \to F$ définie de la manière suivante :

$$\forall x \in E, f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A \\ h(x) & \text{si } x \in B \\ \beta & \text{si } x \in \overline{A \cup B} \end{cases}$$

(En fait, on peut définir f n'importe comment sur $\overline{A \cup B}$.)

Cette définition est sans ambigüité puisque A, B et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints deux à deux et on a bien par définition $f_{|A} = g$ et $f_{|B} = h$, i.e. $\Phi(f) = (g, h)$ donc Φ est surjective.

On a donc bien montré que $\boxed{\Phi \text{ est surjective si et seulement si } A \cap B = \emptyset.}$

3. D'après les deux questions précédentes, on sait qu'on a

$$\Phi \text{ est bijective} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B &= E \\ A \cap B &= \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow A \sqcup B = E.$$

Ceci signifie que tout élément de E appartient à un seul des deux ensembles A ou B.

La bijection réciproque de Φ est alors

$$\boxed{\Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} F^A \times F^B & \longrightarrow & F^E \\ (f, g) & \longmapsto & \Phi^{-1}(f, g) \end{array}}$$

où $\Phi^{-1}(f, g)$ est la fonction définie sur E par

$$\boxed{\forall x \in E, \Phi^{-1}(f, g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}.}$$

Problème 1 : Théorème de Cantor-Bernstein

Partie I - Un résultat de point fixe

1. • Soit $X = E \in \mathcal{P}(E)$. On a $h(E) \in \mathcal{P}(E)$ donc $h(E) \subset E$, ce qui prouve que $E \in H_1$.

• Soit $X = \emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

On a $\emptyset \subset h(\emptyset)$ donc $\emptyset \in H_2$.

A fortiori, $\boxed{H_1 \text{ et } H_2 \text{ sont non vides.}}$

2. Tout d'abord, notons que $V \in \mathcal{P}(E)$.

• Montrons que $h(V) \subset V$.

Puisque $V = \bigcap\limits_{X \in H_1} X$, on a pour tout $X \in H_1, V \subset X$.

Puisque h est croissante pour l'inclusion, on en déduit que pour tout $X \in H_1, h(V) \subset h(X)$.

Or, par définition de H_1, pour tout $X \in H_1, h(X) \subset X$ donc pour tout $x \in H_1, h(V) \subset X$, ce qui implique que $h(V) \subset \bigcap\limits_{X \in H_1} X = V$.

• Montrons que $V \subset h(V)$.
On vient de montrer que $h(V) \subset V$. Puisque h est croissante pour l'inclusion, ceci implique que $h(h(V)) \subset h(V)$ donc $h(V) \in H_1$.
Or, on sait que pour tout $X \in H_1, V \subset X$ donc $V \subset h(V)$.
On en conclut que $\boxed{h(V) = V.}$

3. Tout d'abord, notons que $W \in \mathcal{P}(E)$.
• Montrons que $W \subset h(W)$.
Puisque $W = \displaystyle\bigcup_{X \in H_2} X$, pour tout $X \in H_2, X \subset W$.
Puisque h est croissante pour l'inclusion, on en déduit que pour tout $X \in H_2, h(X) \subset h(W)$.
Or, pour tout $X \in H_2, X \subset h(X)$, donc pour tout $X \in H_2, X \subset h(W)$ et on en conclut que $\displaystyle\bigcup_{X \in H_2} X \subset h(W)$ d'où $W \subset h(W)$.
• Montrons que $h(W) \subset W$.
On a montré que $W \subset h(W)$. Puisque h est croissante pour l'inclusion, ceci implique que $h(W) \subset h(h(W))$ donc $h(W) \in H_2$.
Or, on sait que pour tout $X \in H_2, X \subset W$ donc $h(W) \subset W$.
On en conclut que $\boxed{h(W) = W.}$

4. • Puisque $h(X) = X$, on a en particulier $h(X) \subset X$ donc $X \in H_1$. Puisque V est inclus dans tous les éléments de H_1, on en déduit que $V \subset X$.
• Puisque $h(X) = X$, on a en particulier $X \subset h(X)$ donc $X \in H_2$. Puisque tous les éléments de H_2 sont inclus dans W, on en déduit que $X \subset W$.
On en conclut que $\boxed{V \subset X \subset W.}$

Partie II - Démonstration du théorème

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Montrons que $h(A) \subset h(B)$.
On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} A \subset B \quad & \Rightarrow \quad f(A) \subset f(B) \\ & \Rightarrow \quad \overline{f(B)} \subset \overline{f(A)} \\ & \Rightarrow \quad g\left(\overline{f(B)}\right) \subset g\left(\overline{f(A)}\right) \\ & \Rightarrow \quad \overline{g\left(\overline{f(A)}\right)} \subset \overline{g\left(\overline{f(B)}\right)} \\ & \Rightarrow \quad h(A) \subset h(B), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{h \text{ est une application croissante au sens de l'inclusion.}}$
Or, on a montré dans la première partie que toute application $h : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante au sens de l'inclusion admet un point fixe.
On en déduit que $\boxed{h \text{ admet un point fixe } M.}$

2. • Par définition de M, on a $h(M) = M$, i.e. $\overline{g\left(\overline{f(M)}\right)} = M$.
En passant au complémentaire, on obtient $\overline{\overline{g\left(\overline{f(M)}\right)}} = \overline{M}$, d'où $\boxed{g\left(\overline{f(M)}\right) = \overline{M}.}$
• Soit $y \in \overline{M}$. Puisque $g\left(\overline{f(M)}\right) = \overline{M}$, il existe $x \in \overline{f(M)}$, tel que $g(x) = y$.

Ainsi, y admet un antécédent par g. Or, g est injective donc tout élément de E admet au plus un antécédent par g. Puisque y en admet au moins un, il en admet exactement un.

On en déduit que $\boxed{\text{tout élément de } \overline{M} \text{ a un unique antécédent par } g}$ (et on remarque qu'il est situé dans $\overline{f(M)}$).

3. • Montrons que ϕ est injective.

Soient $(x,y) \in E^2$ tels que $x \neq y$. Montrons que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

$\triangleright$<u>1er cas : $(x,y) \in M^2$</u>

Dans ce cas, $\phi(x) = f(x)$ et $\phi(y) = f(y)$. Puisque $x \neq y$ et que f est injective, on en déduit que $f(x) \neq f(y)$ donc $\phi(x) \neq \phi(y)$.

$\triangleright$<u>2ème cas : $(x,y) \in \overline{M}^2$</u>

Par définition, $\phi(x)$ est l'unique antécédent de x par g et $\phi(y)$ est l'unique antécédent de y par g, i.e. $g(\phi(x)) = x$ et $g(\phi(y)) = y$.

Puisque $x \neq y$, ceci implique que $g(\phi(x)) \neq g(\phi(y))$ et puisque g est injective, on en déduit que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

$\triangleright$<u>3ème cas : $x \in M$ et $y \in \overline{M}$</u> (le cas $x \in \overline{M}$ et $y \in M$ se traite de façon analogue).

D'après la question précédente, l'unique antécédent de y par g est dans $\overline{f(M)}$ donc $\phi(y) \in \overline{f(M)}$. A fortiori, $\phi(x) \neq \phi(y)$ puisque $\phi(x) = f(x) \in f(M.)$

Dans tous les cas, on en conclut que $\phi(x) \neq \phi(y)$, ce qui prouve que ϕ est injective.

• Montrons que ϕ est surjective, i.e. montrons que pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) = y$.

Soit $y \in F$.

$\triangleright$<u>1er cas : $y \in f(M)$</u>

Par définition, il existe alors $x \in M$ tel que $y = f(x) = \phi(x)$.

$\triangleright$<u>2ème cas : $y \in \overline{f(M)}$</u>

Dans ce cas, y est l'unique antécédent par g de $g(y) \in \overline{M}$ donc $\phi(g(y)) = y$.

Dnas les deux cas, y admet un antécédent par ϕ donc ϕ est surjective.

On en conclut que $\boxed{\phi \text{ est bijective.}}$

4. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est injective car strictement croissante et la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ l'est également pour la même raison.

Il existe donc une injection $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ et une injection $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de Cantor-Bernstein, $\boxed{\text{il existe bien une bijection entre } \mathbb{R}_+ \text{ et } \mathbb{R}_+^*.}$

Problème 2 : Pavages et clans

Partie I : Pavages

1. • Les conditions sont vérifiées trivialement pour l'ensemble vide puisqu'il ne contient aucune partie ! Il est donc vrai trivialement que $\boxed{\emptyset \text{ est un pavage achevé de } E.}$

• La seule partie de E contenue dans $\{\emptyset\}$ est $\emptyset$. Or, $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \{\emptyset\}$ et $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \in \{\emptyset\}$.

On vérifie de même que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{\emptyset\}$ (ce qui implique qu'on a nécessairement pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = \emptyset$), on a $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \in \{\emptyset\}$, ce qui prouve que $\boxed{\{\emptyset\} \text{ est un pavage achevé de } E.}$

• Montrons que $\mathcal{P}(E)$ est un pavage achevé de E.
Tout d'abord, on a bien pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \cup B \in \mathcal{P}(E)$ et $A \cap B \in \mathcal{P}(E)$.
Ensuite, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.
On a toujours $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}(E)$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}(E)$ (que la suite soit croissante, décroissante, ou non).
On a donc bien vérifié que $\boxed{\mathcal{P}(E)\,\text{est un pavage achevé de}\,E.}$

2. • Supposons que $E = \{a\}$.
Les pavages de E sont alors $\boxed{\mathcal{P} = \emptyset, \mathcal{P} = \{\emptyset\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}\,\text{et}\,\mathcal{P} = \{\{a\}\}.}$
• Supposons que $E = \{a, b\}$. Dans ce cas, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
Les pavages de E sont alors

$$\mathcal{P} = \emptyset, \mathcal{P} = \{\emptyset\}, \mathcal{P} = \{\{a\}\}, \mathcal{P} = \{\{b\}\}, \mathcal{P} = \{\{a,b\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}\},$$

$$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a,b\}\}, \mathcal{P} = \{\{a\}, \{a,b\}\}, \mathcal{P} = \{\{b\}, \{a,b\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}$$
$$\text{et}\,\mathcal{P} = \mathcal{P}(E).$$

3. (a) Tout d'abord, notons que $f^{-1}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{P}(E)$ puisque pour tout $A \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(F)$, i.e. $A \subset F$, on a $f^{-1}(A) \subset E$.
Soit $(A, B) \in (f^{-1}(\mathcal{Q}))^2$.
Par définition de $f^{-1}(\mathcal{Q})$, ceci signifie qu'il existe $(A', B') \in \mathcal{Q}^2$ tel que $A = f^{-1}(A')$ et $B = f^{-1}(B')$.
Par propriété de l'image réciproque, $A \cup B = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') = f^{-1}(A' \cup B')$.
Or, puisque $(A', B') \in \mathcal{Q}^2$ et que $\mathcal{Q}$ est un pavage de F, on a $A' \cup B' \in \mathcal{Q}$ donc $A \cup B = f^{-1}(A' \cup B') \in f^{-1}(\mathcal{Q})$.
On a de même $A \cap B = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(A' \cap B')$ avec $A' \cap B' \in \mathcal{Q}$ donc $A \cap B = f^{-1}(A' \cap B') \in f^{-1}(\mathcal{Q})$.
On a donc bien vérifié que pour tout $(A, B) \in f^{-1}(\mathcal{Q})^2$, $\left\{\begin{array}{l} A \cup B \in f^{-1}(\mathcal{Q}) \\ A \cap B \in f^{-1}(\mathcal{Q}) \end{array}\right.$, ce qui prouve que $\boxed{f^{-1}(\mathcal{Q})\,\text{est un pavage de}\,E.}$

(b) Tout d'abord, notons que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}(F)$.
Soient $(A, B) \in f(\mathcal{P})^2$.
Par propriété de l'image réciproque, on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
Or, par définition de $f(\mathcal{P})$, on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}$ et $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{P}$ est un pavage de E, on en déduit que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \in \mathcal{P}$, ce qui implique que $f^{-1}(A \cup B) \in \mathcal{P}$.
Par définition, ceci signifie que $A \cup B \in f(\mathcal{P})$.
On a de même $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{P}$ puisque $\mathcal{P}$ est un pavage de E, ce qui implique que $A \cap B \in f(\mathcal{P})$.
On a donc bien vérifié que pour tout $(A, B) \in f^(\mathcal{P})^2$, $\left\{\begin{array}{l} A \cup B \in f(\mathcal{P}) \\ A \cap B \in f(\mathcal{P}) \end{array}\right.$, ce qui prouve que $\boxed{f(\mathcal{P})\,\text{est un pavage de}\,F.}$

4. (a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.
• Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $A_n = A_p$.
Ceci signifie que pour tout entier naturel p, il existe un entier $n_p > n$ tel que $A_p \subsetneq A_{n_p}$, où l'inclusion est stricte.

En particulier, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $A_0 \subsetneq A_{n_0}$, c'est à dire qu'il existe un élément $x_{n_0} \in A_{n_0}$ tel que $x_{n_0} \notin A_0$.
De même, il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que $A_{n_0} \subsetneq A_{n_1}$, c'est à dire qu'il existe un élément $x_{n_1} \in A_{n_1}$ tel que $x_{n_1} \notin A_{n_0}$. A fortiori, $x_{n_1} \neq x_{n_0}$.
On itère ce procédé et on obtient une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ et une suite $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E deux à deux distincts. On obtient donc un nombre infini d'éléments de E, ce qui est en contradiction avec le fait que E est un ensemble fini.
L'hypothèse faite était donc absurde, ce qui prouve bien qu'

$$\boxed{\text{il existe un entier naturel } p \text{ tel que pour tout } n \geqslant p, A_n = A_p.}$$

• Montrons par double inclusion que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p$.

⋆ Montrons que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_p$.

Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Par définition, ceci signifie qu'il existe un entier naturel n tel que $x \in A_n$.
- Si $n \geqslant p$, on sait que $A_n = A_p$ donc $x \in A_p$.
- Si $n \leqslant p$, alors $A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots \subset A_p$ donc on a également $x \in A_p$.
Dans les deux cas, $x \in A_p$, ce qui prouve bien l'inclusion $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_p$.

⋆ Montrons que $A_p \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Soit $x \in A_p$. Alors il existe bien un entier naturel $n = p$ tel que $x \in A_n$, ce qui signifie que $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On a donc bien prouvé que $A_p \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On en conclut par double inclusion que $\boxed{\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p.}$

(b) • Considérons désormais le cas où la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}, \overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$. Ainsi, la suite $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de E.
On est alors ramené à la question précédente, ce qui prouve qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout $n \geqslant p, \overline{A_n} = \overline{A_p}$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant p, A_n = A_p$.
On a donc bien montré

$$\boxed{\text{l'existence d'un entier naturel } p \text{ tel que pour tout } n \geqslant p, A_n = A_p.}$$

• En appliquant la question précédente à la suite croissante $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{A_p}$.
Par passage au complémentaire, on en déduit que

$$A_p = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\overline{A_n}}$$

d'où

$$\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p.}$$

(c) Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E.

• Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}$. D'après la question 3.(a), il existe un entier naturel p tel que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p \in \mathcal{P}$.

• Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$. D'après la question précédente, il existe un entier naturel p tel que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p \in \mathcal{P}$.

Ces deux points prouvent que $\mathcal{P}$ est un pavage achevé de E.

On en déduit que $\boxed{\text{tout pavage de } E \text{ est achevé.}}$

5. (a) Raisonnons par double inclusion.

• Montrons que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,n]\!] \subset \mathbb{N}$.

Soit $k \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,n]\!]$.

Par définition, ceci signifie qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in [\![0,n]\!]$. A fortiori, $k \in \mathbb{N}$, ce qui prouve l'inclusion voulue.

• Montrons que $\mathbb{N} \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,n]\!]$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition, $k \in [\![0,k]\!]$. Ainsi, il existe bien un entier naturel n, en l'occurrence $n = k$, tel que $k \in [\![0,n]\!]$, ce qui signifie que $k \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,n]\!]$ et prouve l'inclusion voulue.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,n]\!] = \mathbb{N}.}$

(b) Commençons par montrer que $\mathcal{P}$ est un pavage de $\mathbb{N}$.

Tout d'abord, on a bien $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Soient $(A,B) \in \mathcal{P}^2$. Par définition de $\mathcal{P}$, il existe des entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $A = [\![0,n]\!]$ et $B = [\![0,p]\!]$.

On a alors $A \cup B = [\![0, \max(n,p)]\!] \in \mathcal{P}$ et $A \cap B = [\![0, \min(n,p)]\!] \in \mathcal{P}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}$ est un pavage de $\mathbb{N}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = [\![0,n]\!] \in \mathcal{P}$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.

Or, d'après la question précédente, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ qui n'est pas un élément de $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{P} \text{ est un pavage non achevé de } \mathbb{N}.}$

6. (a) La question 2 nous fournit des contre-exemples.

En effet, soit $E = \{a,b\}, \mathcal{P}_1 = \{\{a\}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\{b\}\}$.

On a vu en question 2 que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des pavages de E mais $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \{\{a\},\{b\}\}$ n'est pas un pavage de E (en particulier parce que $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \notin \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$).

Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \text{ n'est pas nécessairement un pavage de } E.}$

(b) Montrons que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un pavage de E.

Tout d'abord, puisque $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}(E)$, on a bien $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}(E)$.

Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^2$.

Puisque $A \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{P}_1$ et que $\mathcal{P}_1$ est un pavage, alors $A \cup B \in \mathcal{P}_1$ et $A \cap B \in \mathcal{P}_1$.

De même, puisque $\mathcal{P}_2$ est un pavage, on a également $A \cup B \in \mathcal{P}_2$ et $A \cap B \in \mathcal{P}_2$.

Ainsi, $A \cup B \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ et $A \cap B \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \text{ est un pavage de } E.}$

7. (a) Par définition, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(E)$ et d'après la question 1, $\mathcal{P}(E)$ est un pavage achevé de E. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ est un pavage achevé de E contenant $\mathcal{P}$ donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des pavages achevés de } E \text{ contenant } \mathcal{P} \text{ est non vide.}}$$

(b) • On a démontré en question 6.(b) qu'une intersection de deux pavages de E était encore un pavage de E. La même démonstration se généralise à un nombre quelconque de pavages, et on montrerait de même qu'une intersection en nombre quelconque de pavages de E est encore un pavage de E.

D'après la question précédente, l'ensemble des pavages achevé de E contenant $\mathcal{P}$ étant non vide, l'intersection de tous ces pavages est donc encore un pavage contenant $\mathcal{P}$ (puisque $\mathcal{P}$ est contenu dans chacun d'entre eux).

Ceci justifie que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage contenant $\mathcal{P}$.

• Montrons maintenant que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage achevé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Soit $\mathcal{Q}$ un pavage achevé de E contenant $\mathcal{P}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{Q}$. Puisque $\mathcal{Q}$ est un pavage achevé de E, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{Q}$.

Ceci étant vrai pour tous les pavages achevés de E contenant $\mathcal{P}$, on en déduit que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Une preuve analogue montre que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \widehat{\mathcal{P}}$.

On en conclut que $\boxed{\widehat{\mathcal{P}} \text{ est un pavage achevé contenant } \mathcal{P}.}$

(c) Soit $\mathcal{Q}$ un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$. Par définition, $\widehat{\mathcal{P}}$ est l'intersection de tous les pavages achevés contenant $\mathcal{P}$ donc $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{Q}$.

$\boxed{\text{Ainsi, si un pavage achevé contient } \mathcal{P}, \text{ il contient } \widehat{\mathcal{P}}.}$

(d) • Supposons que $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$. Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage achevé, alors $\mathcal{P}$ est un pavage achevé.

• Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}$ est un pavage achevé. C'est un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$ donc il contient $\widehat{\mathcal{P}}$ d'après la question précédente.

De plus, par définition $\widehat{\mathcal{P}}$ contient $\mathcal{P}$, ce qui prouve par double inclusion que $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$.

On en conclut que $\boxed{\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}} \text{ si et seulement si } \mathcal{P} \text{ est un pavage achevé.}}$

8. (a) Tout d'abord, on a bien $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}(E)$.

• Montrons que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E.

Soient $(B, B') \in \mathcal{P}_m^2$.

Soit $A \in \mathcal{P}$. Par définition de $\mathcal{P}_m, B \cap A \in \mathcal{P}$ et $B' \cap A \in \mathcal{P}$.

Puisque $\mathcal{P}$ est un pavage, alors

$$(B \cup B') \cap A = \underbrace{(B \cap A)}_{\in\mathcal{P}} \cup \underbrace{(B' \cap A)}_{\in\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$$

et

$$(B \cap B') \cap A = \underbrace{(B \cap A)}_{\in \mathcal{P}} \cap \underbrace{(B' \cap A)}_{\in \mathcal{P}} \in \mathcal{P}$$

donc $B \cup B' \in \mathcal{P}_m$ et $B \cap B' \in \mathcal{P}_m$ (puisque ceci est vrai pour tout $A \in \mathcal{P}$).
On en déduit que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E.
• Montrons que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_m$.
Pour tout $B \in \mathcal{P}$, pour tout $A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}$ puisque $\mathcal{P}$ est un pavage, donc $B \in \mathcal{P}_m$.
Ceci prouve bien que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_m$.
$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{P}_m \text{ est un pavage de } E \text{ contenant } \mathcal{P}.}$

(b) Supposons que $\mathcal{P}$ est achevé. Montrons que $\mathcal{P}_m$ est achevé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}_m$.
Soit $A \in \mathcal{P}$. Alors, $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{P}_m$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \cap A \in \mathcal{P}$ par définition de $\mathcal{P}_m$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ donc $A_n \cap A \subset A_{n+1} \cap A$.
Ainsi, $(A_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{P}$ est un pavage achevé, on en déduit que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A) \in \mathcal{P}$, i.e. $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A \in \mathcal{P}$, et ce pour tout $A \in \mathcal{P}$, ce qui prouve que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}_m$.
La preuve est analogue pour les suites décroissantes d'éléments de $\mathcal{P}_m$ et on en conclut que $\boxed{\mathcal{P}_m \text{ est achevé.}}$

Partie II : Clans

1. On a déjà vu dans la Partie I que ces trois ensembles sont des pavages de E. Il reste à vérifier la propriété supplémentaire introduite en début de Partie II.
   • Comme précédemment, cette propriété est vérifiée trivialement pour $\emptyset$ puisque l'ensemble vide ne contient aucune partie de E. Ainsi, $\boxed{\emptyset \text{ est un clan de } E.}$
   • Si $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$, alors pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}^2, A = B = \emptyset$ donc $A \cap \overline{B} = \emptyset \cap E = \emptyset \in \mathcal{P}$ donc $\boxed{\{\emptyset\} \text{ est un clan de } E.}$
   • Enfin, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}(E)$ donc $\boxed{\mathcal{P}(E) \text{ est un clan de } E.}$
2. Encore une fois, il suffit de considérer les pavages obtenus dans la partie I et de conserver parmi ceux-ci uniquement ceux qui vérifient la propriété supplémentaire qui fait d'un pavage un clan.
   • Si $E = \{a\}$, les clans de E sont $\boxed{\mathcal{P} = \emptyset, \mathcal{P} = \{\emptyset\}, \text{ et } \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}.}$
   • Si $E = \{a, b\}$, les clans de E sont
   $$\boxed{\mathcal{P} = \emptyset, \mathcal{P} = \{\emptyset\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a, b\}\}, \text{et } \mathcal{P} = \mathcal{P}(E).}$$
3. • On sait déjà que $f^{-1}(\mathcal{Q})$ est un pavage de E d'après la partie précédente puisque $\mathcal{Q}$ est un pavage de F.
   Il reste à montrer que pour tout $(A, B) \in (f^{-1}(\mathcal{Q}))^2, A \cap \overline{B} \in f^{-1}(\mathcal{Q})$.
   Soit $(A, B) \in (f^{-1}(\mathcal{Q}))^2$.

Par définition de $f^{-1}(\mathcal{Q})$, cela signifie qu'il existe $(A', B') \in \mathcal{Q}^2$ tel que $A = f^{-1}(A')$ et $B = f^{-1}(B')$.
Par propriété de l'image réciproque, on a alors

$$A \cap \overline{B} = f^{-1}(A') \cap \overline{f^{-1}(B')} = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(\overline{B'}) = f^{-1}(A' \cap \overline{B}').$$

Puisque $\mathcal{Q}$ est un clan, on a $A' \cap \overline{B}' \in \mathcal{Q}$ donc $f^{-1}(A' \cap \overline{B'}) \in f^{-1}(\mathcal{Q})$, i.e. $A \cap \overline{B} \in f^{-1}(\mathcal{Q})$, ce qui prouve que $\boxed{f^{-1}(\mathcal{Q}) \text{ est un clan de } E.}$

- On sait déjà que $f(\mathcal{P})$ est un pavage de F d'après la partie précédente puisque $\mathcal{P}$ est un pavage de E.

Il reste à montrer que pour tout $(A, B) \in f(\mathcal{P})^2, A \cap \overline{B} \in f(\mathcal{P})$.
Soit $(A, B) \in (f(\mathcal{P}))^2$.
Par propriété de l'image réciproque, on a

$$f^{-1}(A \cap \overline{B}) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)}.$$

Or, par définition de $f(\mathcal{P}), f^{-1}(A) \in \mathcal{P}$ et $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}$.
Puisque $\mathcal{P}$ est un clan, on en déduit que $f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)} \in \mathcal{P}$, i.e. $f^{-1}(A \cap \overline{B}) \in \mathcal{P}$.
Par définition, ceci prouve que $A \cap \overline{B} \in f(\mathcal{P})$.
On en déduit que $\boxed{f(\mathcal{P}) \text{ est un clan de } F.}$

4. Soit $\mathcal{P}$ un clan de E. Montrons que $\mathcal{P}_m$ est un clan de E.
Puisque $\mathcal{P}$ est un pavage de E, on sait déjà d'après la partie précédente que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E.
Il reste à montrer que pour tout $(B, B') \in \mathcal{P}_m^2$, $B \cap \overline{B'} \in \mathcal{P}_m$.
Soient $(B, B') \in \mathcal{P}_m^2$.
Soit $A \in \mathcal{P}$. Il faut montrer que $(B \cap \overline{B'}) \cap A \in \mathcal{P}$.
Par définition de $\mathcal{P}_m, B \cap A \in \mathcal{P}$ et $B' \cap A \in \mathcal{P}$.
Puisque $\mathcal{P}$ est un clan, on en déduit que $(B \cap A) \cap \overline{(B' \cap A)} \in \mathcal{P}$.
Or, $(B \cap A) \cap \overline{(B' \cap A)} = (B \cap A) \cap (\overline{B'} \cup \overline{A}) = (B \cap A \cap \overline{B'}) \cup \underbrace{(B \cap A \cap \overline{A})}_{=\emptyset} = (B \cap \overline{B'}) \cap A.$
On en déduit que pour tout $A \in \mathcal{P}, (B \cap \overline{B'}) \cap A \in \mathcal{P}$, ce qui implique que $B \cap \overline{B'} \in \mathcal{P}_m$.
$\boxed{\text{On en conclut que si } \mathcal{P} \text{ est un clan de } E, \text{ alors } \mathcal{P}_m \text{ est un clan de } E.}$

5. (a) • Montrons que $\mathcal{E}_A$ est un pavage. Tout d'abord, notons que $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{P}(E)$.
Soient $(B, B') \in \mathcal{E}_A^2$.
Par définition de $\mathcal{E}_A$, ceci signifie que $A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$ et que $A \cap \overline{B'} \in \widehat{\mathcal{P}}$.
D'après la partie précédente, on sait que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage donc $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B'}) \in \widehat{\mathcal{P}}$ et $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{B'}) \in \widehat{\mathcal{P}}$.
On en déduit que

$$A \cap (\overline{B \cup B'}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{B'}) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{B'}) \in \widehat{\mathcal{P}}$$

et

$$A \cap (\overline{B \cap B'}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{B'}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B'}) \in \widehat{\mathcal{P}},$$

ce qui prouve que $B \cup B' \in \mathcal{E}_A$ et que $B \cap B' \in \mathcal{E}_A$.
On en déduit que $\mathcal{E}_A$ est un pavage de E.
• Montrons que $\mathcal{E}_A$ est un pavage achevé de E.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_A$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \overline{A_{n+1}} \subset \overline{A_n}$.

Par définition de $\mathcal{E}_A$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, A \cap \overline{A_n} \in \widehat{\mathcal{P}}$ et que $A \cap \overline{A_{n+1}} \subset A \cap \overline{A_n}$.

Ainsi, $(A \cap \overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage achevé d'après la partie précédente, on en déduit que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A \cap \overline{A_n}) \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Or, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A \cap \overline{A_n}) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) \cap A = \left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) \cap A \in \widehat{\mathcal{P}}$, ce qui prouve que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}_A$.

De même, si on considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{E}_A$, alors $(A \cap \overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$ donc, puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, on en déduit que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap \overline{A_n}) \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Or, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap \overline{A_n}) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) \cap A = \left(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) \cap A \in \widehat{\mathcal{P}}$, ce qui prouve que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}_A$.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\mathcal{E}_A \text{ est un pavage achevé de } E.}$

(b) Supposons que $A \in \mathcal{P}$.

• Montrons que $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_A$.

Soit $B \in \mathcal{P}$. Puisque $A \in \mathcal{P}$ et que $\mathcal{P}$ est un clan, alors $A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

Or, par définition, $\mathcal{P} \subset \widehat{\mathcal{P}}$ donc pour tout $B \in \mathcal{P}, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$, ce qui prouve que $B \in \mathcal{E}_A$, et ce pour tout $B \in \mathcal{P}$.

On a donc bien montré que $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_A$.

• D'après la question précédente, $\mathcal{E}_A$ est alors un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.

Or, d'après la partie précédente, le plus petit (au sens de l'inclusion) pavage achevé contenant $\mathcal{P}$ est $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ceci assure que $\boxed{\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}_A.}$

(c) • Montrons que $\mathcal{F}_B$ est un pavage. Tout d'abord, notons que $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{P}(E)$.

Soient $(A, A') \in \mathcal{F}_B^2$.

Par définition de $\mathcal{F}_B$, ceci signifie que $A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$ et que $A' \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$.

D'après la partie précédente, on sait que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage donc $(A\cap\overline{B})\cup(A'\cap\overline{B}) \in \widehat{\mathcal{P}}$ et $(A \cap \overline{B}) \cap (A' \cap \overline{B}) \in \widehat{\mathcal{P}}$.

On en déduit que

$$(A \cap A') \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cap (A' \cap \overline{B}) \in \widehat{\mathcal{P}}$$

et

$$(A \cup A') \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (A' \cap \overline{B}) \in \widehat{\mathcal{P}}$$

ce qui prouve que $A \cap A' \in \mathcal{F}_B$ et que $A \cup A' \in \mathcal{F}_B$.

On en déduit que $\mathcal{F}_B$ est un pavage de E.

• Montrons que $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}_B$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.

Par définition de $\mathcal{F}_B$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$ et que $A_n \cap \overline{B} \subset A_{n+1} \cap \overline{B}$.

Ainsi, $(A_n \cap \overline{B})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage achevé d'après la partie précédente, on en déduit que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap \overline{B}) \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Or, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap \overline{B}) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$, ce qui prouve que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_B$.

De même, si on considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{F}_B$, alors $(A_n \cap \overline{B})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$ donc, puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, on en déduit que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap \overline{B}) \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Or, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap \overline{B}) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$, ce qui prouve que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_B$.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \text{ est un pavage achevé de } E.}$

(d) Supposons que $B \in \widehat{\mathcal{P}}$.

• Montrons que $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}_B$.

Soit $A \in \mathcal{P}$.

D'après la question 5.(b), puisque $A \in \mathcal{P}$, on sait que $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}_A$. Puisque $B \in \widehat{\mathcal{P}}$, on en déduit que $A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$, ce qui signifie que $A \in \mathcal{F}_B$.

On a donc bien montré l'inclusion $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}_B$.

• D'après la question précédente, on sait maintenant que $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E contenant $\mathcal{P}$. Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est le plus petit pavage achevé contenant $\mathcal{P}$, on en déduit que $\boxed{\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{F}_B.}$

(e) Montrons enfin que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan de E.

Soient $(A, B) \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Puisque $B \in \widehat{\mathcal{P}}$, on sait d'après la question précédente que $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{F}_B$.

Puisque $A \in \widehat{\mathcal{P}}$, on en déduit que $A \in \mathcal{F}_B$, i.e. $A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$, ce qu'on voulait montrer.

On en conclut que $\boxed{\widehat{\mathcal{P}} \text{ est un clan de } E.}$