

Corrigé de la liste d'exercices n°22

Probabilités

Exercice 1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Exercice 2.

1.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{7\}, \{42\}, \{1, 2\}, \{1, 7\}, \{1, 42\}, \{2, 7\}, \{2, 42\}, \{7, 42\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 2, 42\}, \{1, 7, 42\}, \{2, 7, 42\}, E\}.$$

2. 2 n'est pas un élément de $\mathcal{P}(E)$ mais $\{2\}$ l'est. En revanche, on a bien $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

3. Tous les éléments de A appartiennent à $\mathcal{P}(E)$ donc a bien $A \subset \mathcal{P}(E)$. Idem pour B .

Exercice 3.

1. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

2. $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

3. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4. $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

Exercice 4. • Soit $\Omega = \llbracket 1, 12 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme. On note A l'événement « tirer un nombre pair », i.e; $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ et B l'événement « tirer un multiple de 3 », i.e. $B = \{3, 6, 9, 12\}$.

On a d'une part $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

D'autre part $A \cap B$ est l'événement « tirer un multiple de 6 », i.e. $A \cap B = \{6, 12\}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

• Si $\Omega = \llbracket 1, 13 \rrbracket$, les événements A et B sont inchangés donc $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{13}, \mathbb{P}(B) = \frac{4}{13}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{13} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc les événements A et B ne sont plus indépendants.

Exercice 5.

1. On est dans une situation d'équiprobabilité donc la probabilité que Bob gagne vaut le quotient $\frac{\text{nombre de mains gagnantes}}{\text{nombre de mains possibles}}$.

Le nombre de mains possibles vaut $\binom{52}{5}$. Dénombrons maintenant le nombre de mains gagnantes, c'est à dire le nombre de mains de 5 cartes comportant l'as de pique. Si l'as de pique fait partie des 5 cartes, il reste à choisir 4 cartes parmi 51 pour compléter la main donc le nombre de mains gagnantes vaut $\binom{51}{4}$. La probabilité que Bob gagne vaut donc

$$\frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{51!}{47!4!} \times \frac{47!5!}{52!} = \frac{5}{52}.$$

2. Notons B l'événement « Bob gagne » et A l'événement « Alice a retiré l'as de pique ». D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements (A, \bar{A}) , on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B).$$

Si Alice a retiré l'as de pique, Bob ne peut pas gagner donc $\mathbb{P}_A(B) = 0$.

L'événement \bar{A} est réalisé si Alice n'a pas retiré l'as de pique, c'est à dire si elle a tiré 10 cartes parmi les 51 cartes qui ne sont pas l'as de pique donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\binom{51}{10}}{\binom{52}{10}} = \frac{51!}{10!41!} \frac{10!42!}{52!} = \frac{42}{52} = \frac{21}{26}.$$

Si Alice n'a pas retiré l'as de pique, Bob choisit donc 5 cartes parmi 42 qui contiennent l'as de pique donc

$$\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = \frac{\binom{41}{4}}{\binom{42}{5}} = \frac{41!}{4!47!} \frac{5!47!}{42!} = \frac{5}{42}$$

donc $\mathbb{P}(B) = \frac{21}{26} \frac{5}{42} = \frac{5}{52}$. La probabilité n'a donc pas changé!

Exercice 6.

1. Notons B l'événement « Bob gagne » et T l'événement « Bob triche ». D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements (T, \bar{T}) , on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(B) + \mathbb{P}(\bar{T})\mathbb{P}_{\bar{T}}(B) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{40}.$$

2. Notons G l'événement « Bob gagne 7 jours d'affilée » et A l'événement « Bob a triché au moins une fois ». Il s'agit de calculer $\mathbb{P}_G(A)$.

Puisque P_G est une probabilité, on a $P_G(A) = 1 - \mathbb{P}_G(\bar{A})$. Or, on a

$$\mathbb{P}_G(\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(G)}{\mathbb{P}(G)}.$$

On a $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(B)^7 = \left(\frac{23}{40}\right)^7$.

Par ailleurs, \bar{A} est l'événement « Bob n'a jamais triché » donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = (1 - \mathbb{P}(T))^7 = \left(\frac{7}{10}\right)^7$$

et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(G) = \left(\frac{1}{2}\right)^7$ donc $\mathbb{P}_G(\bar{A}) = \frac{\left(\frac{7}{10}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{23}{40}\right)^7} = \left(\frac{14}{23}\right)^7$ d'où finalement

$$\mathbb{P}_G(A) = 1 - \left(\frac{14}{23}\right)^7 \simeq 0,97.$$

Exercice 7. Notons A_n l'événement « la boule tirée porte le numéro de la boîte dont on l'a extraite ».

On note également pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'événement B_k : « la boîte choisie est la boîte numéro k ».

Les événements $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ forment un système complet d'événements donc on obtient d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On peut montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ donc quand le nombre de boîtes n tend vers l'infini, on a $\mathbb{P}(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$, donc cette probabilité tend vers 0 si le nombre de boîtes n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'urne est constituée au temps n de $n + 2$ boules parmi lesquelles le nombre de boules rouges est compris entre 1 et $n + 1$ (et idem pour les boules vertes).

Montrons le résultat souhaité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0, S_0 = 1$ d'après l'énoncé donc $\mathbb{P}(S_0) = 1$, i.e. pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket = \{1\}, \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie au rang n , i.e. pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{n + 1}$ et montrons la propriété au rang $n + 1$, i.e. pour tout $k \in \llbracket 1, n + 2 \rrbracket, \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n + 2}$.

Soit $k \in \llbracket 1, n + 2 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(S_n = i)_{1 \leq i \leq n+1}$, on a

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(S_n = i) \mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n + 1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k),$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence.

Or, d'après l'énoncé, s'il y a k boules rouges au temps $n + 1$, il ne pouvait y avoir que k ou $k - 1$ boules rouges au temps n donc $\mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k) = 0$ si $i \notin \{k, k - 1\}$. Ainsi, il ne reste que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n + 1} (\mathbb{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k) + \mathbb{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k)).$$

On a alors trois cas :

- Si $k = 1$, alors l'événement $(S_n = k - 1) = (S_n = 0)$ est impossible et $\mathbb{P}_{(S_n=1)}(S_{n+1} = 1)$ représente la probabilité de tirer une boule verte dans une urne contenant $n + 2$ boules dont $n + 1$ vertes donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{P}_{(S_n=1)}(S_{n+1} = 1)}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} \times \frac{n + 1}{n + 2} = \frac{1}{n + 2}.$$

- Si $k = n + 2$, alors l'événement $(S_n = k) = (S_n = n + 2)$ est impossible et $\mathbb{P}_{(S_n=n+1)}(S_{n+1} = n + 2)$ représente la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant $n + 2$ boules dont $n + 1$ rouges donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = n + 2) = \frac{\mathbb{P}_{(S_n=n+1)}(S_{n+1} = n + 2)}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} \times \frac{n + 1}{n + 2} = \frac{1}{n + 2}.$$

- Si $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, alors $\mathbb{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k)$ représente la probabilité de tirer une boule rouge dans urne contenant $n + 2$ boules dont $k - 1$ rouges et $\mathbb{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k)$ représente la probabilité de tirer une boule verte dans une urne contenant $n + 2$ boules dont $n + 2 - k$ vertes donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{k-1}{n+2} + \frac{n+2-k}{n+2} \right) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Finalement, pour tout $k \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire S_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Exercice 9. Chaque élève a 366 anniversaires possibles donc $\Omega = \llbracket 1, 366 \rrbracket^{45}$, d'où $\text{Card}(\Omega) = 366^{45}$.

Notons A l'événement « Au moins deux élèves partagent le même anniversaire ». On a alors \bar{A} : « aucun élève ne partage le même anniversaire ».

Calculons $\mathbb{P}(\bar{A})$. Calculons le nombre de 45-uplets de dates d'anniversaire qui conviennent. On commence par choisir 45 dates d'anniversaire différentes (cela peut se faire de $\binom{366}{45}$) façons différentes puis on les attribue à chacun des élèves (cela peut se faire de $45!$ façons possibles).

On a donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{45! \binom{366}{45}}{366^{45}} = \frac{366!}{321! \times 366^{45}} = \frac{366}{366} \times \frac{365}{366} \times \cdots \times \frac{322}{366} \simeq 0,06$$

donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \simeq 0,94$.