Lycée Fénelon
Année 2025-2026

PCSI
A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°7
Samedi 11 avril 2026 (4h00)

# Exercice 1 : La part du lion

1. • On a $u_2 = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2)$.

   Puisque les jours sont indépendants, il vient $u_2 = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ donc $\boxed{u_2 = \frac{4}{9}.}$

   • De même, $u_3 = \mathbb{P}(Z_1 \cap G_2 \cap G_3) = \mathbb{P}(Z_1) \times \mathbb{P}(G_2) \times \mathbb{P}(G_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ donc $\boxed{u_3 = \frac{4}{27}.}$

   • Les seules contraintes pour que la première fois que le lion ait mangé deux gazelles de suite aux troisième et quatrième repas sont qu'il ait mangé un zèbre le deuxième jour et une gazelle le troisième et le quatrième jour (le premier jour n'ayant dans ce cas aucune importance).

   Ainsi, $\boxed{E_4 = Z_2 \cap G_3 \cap G_4}$. En utilisant encore l'indépendance des jours, on a donc $u_4 = \mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(Z_2) \times \mathbb{P}(G_3) \times \mathbb{P}(G_4) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ donc $\boxed{u_4 = \frac{4}{27}.}$

2. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

   Par définition de l'événement $E_{n+2}^k$, ce qui se passe avant le $k$-ème jour n'influe aucunement sur sa réalisation. On se rappelle également que les jours sont indépendants et notons que du $k$-ème jour au $n+2$-ème jour inclus, il y $n+2-k+1 = n-k+3$ jours.

   Ainsi, la probabilité que l'événement $E_{n+2}^k$ se réalise, c'est à dire que, entre le $k$-ème jour et le $n+2$-ème le lion mange pour la première fois une gazelle deux fois de suite aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème jour, revient à calculer la probabilité que le lion mange pour la première fois une gazelle deux fois de suite aux $(n-k+2)$-ème et $(n-k+3)$-ème jour, ce qui est la probabilité de l'événement $E_{n-k+3}$.

   Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(E_{n+2}^k) = \mathbb{P}(E_{n-k+3}) = u_{n-k+3}.}$

   (b) Pour que le lion mange pour la première fois deux fois d'affilée de la gazelle aux $(n+1)-$ème et $(n+2)$-ème jours, il y a deux cas :

   — Soit le lion a mangé un zèbre le premier jour, auquel cas, la première fois qu'il aura mangé de la gazelle deux fois de suite entre le deuxième et le $(n+2)$-ème jour sera aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème jours, ce qui est l'événement $Z_1 \cap E_{n+2}^2$;

   — Soit le lion a mangé une gazelle le premier jour. Puisque $n+2 \geqslant 4$, il ne peut pas avoir mangé de la gazelle aux deux premiers jours. Il a donc nécessairement mangé un zèbre le deuxième jour, puis, la première fois qu'il aura mangé de la gazelle deux fois de suite entre le troisième et le $(n+2)$-ème jour sera aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème jours, ce qui est l'événement $G_1 \cap Z_2 \cap E_{n+2}^3$.

   On a donc
   $$\boxed{E_{n+2} = (Z_1 \cap E_{n+2}^2) \sqcup (G_1 \cap Z_2 \cap E_{n+2}^3).}$$

   (c) • On a $\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) = \dfrac{\mathbb{P}(Z_1 \cap E_{n+2})}{\mathbb{P}(Z_1)}$.

Or, d'après la question précédente, on a

$$E_{n+2} \cap Z_1 = (Z_1 \cap Z_1 \cap E^2_{n+2}) \sqcup (Z_1 \cap G_1 \cap Z_2 \cap E^3_{n+2}) = (Z_1 \cap E^2_{n+2})$$

puisque $Z_1 \cap G_1 = \emptyset$.

On obtient donc (en utilisant de nouveau l'indépendance des jours et le résultat de la question a)) :

$$\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) = \frac{\mathbb{P}(Z_1 \cap E^2_{n+2})}{\mathbb{P}(Z_1)} = \frac{\mathbb{P}(Z_1) \times \mathbb{P}(E^2_{n+2})}{\mathbb{P}(Z_1)} = \mathbb{P}(E^2_{n+2}) = u_{n-2+3}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) = u_{n+1}.}$

• En raisonnant de même, on a

$$\mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2}) = \frac{\mathbb{P}(E_{n+2} \cap G_1)}{\mathbb{P}(G_1)} = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap Z_2 \cap E^3_{n+2})}{\mathbb{P}(G_1)} = \mathbb{P}(Z_2) \times \mathbb{P}(E^3_{n+2}) = \frac{1}{3}u_{n-3+3}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2}) = \frac{1}{3}u_n.}$

(d) D'après la formule des probabilités dans le système complet d'événements $(Z_1, G_1)$, on a

$$u_{n+2} = \mathbb{P}(E_{n+2}) = \mathbb{P}(Z_1) \times \mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) + \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2}) = \frac{1}{3} \times u_{n+1} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}u_n$$

d'où $\boxed{u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.}$

3. • Pour que la relation soit vraie pour $n = 1$, il faut qu'on ait $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{9}u_1$ d'où

$$u_1 = \frac{9}{2}\left(u_3 - \frac{1}{3}u_2\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{4}{27} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right)$$

i.e. $\boxed{u_1 = 0.}$

• Pour que la relation soit vraie pour $n = 0$, il faut qu'on ait $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{9}u_0$ d'où

$$u_0 = \frac{9}{2}\left(u_2 - \frac{1}{3}u_1\right) = \frac{9}{2} \times \frac{4}{9}$$

i.e. $\boxed{u_0 = 2.}$

4. L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$(EC) : r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$$

dont les racines sont $r_1 = \frac{2}{3}$ et $r_2 = -\frac{1}{3}$.

Il existe donc deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^n + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

En évaluant pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \lambda + \mu \\ u_1 & = & \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2 & = & \lambda + \mu \\ 0 & = & \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3\lambda & = & 2 \\ \mu & = & 2\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & \frac{2}{3} \\ \mu & = & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ i.e.

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 4 \times \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.}$$

## Exercice 2 : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$.
   • Calculons $\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt$ en effectuant une intégration par parties. Pour cela, on pose $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = \cos(k\pi t), v(t) = \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$ et on obtient
$$\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt = \left[\frac{t\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi t)dt = \left[\frac{\cos(k\pi t)}{k^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2\pi^2}$$
   donc $\boxed{\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}.}$
   • Calculons $\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt$ en effectuant une intégration par parties. Pour cela, on pose $u(t) = t^2, u'(t) = 2t, v'(t) = \cos(k\pi t), v(t) = \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$ et on obtient
$$\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt = \left[\frac{t^2\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 t\sin(k\pi t)dt = -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 t\sin(k\pi t)dt.$$
   On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = -\sin(k\pi t), v(t) = \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}$ et on obtient
$$\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt = \frac{2}{k\pi}\left[\frac{t\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 \cos(k\pi t)dt = \frac{2\cos(k\pi)}{k^2\pi^2} - \frac{2}{k^2\pi^2}\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1$$
   donc $\boxed{\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt = \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2}.}$
2. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale, on obtient
$$\int_0^1 (at^2 + bt)\cos(k\pi t)dt = a\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt + b\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt = \frac{(-1)^k(2a + b) - b}{k^2\pi^2}.$$
   On veut $\left\{\begin{array}{rcl} 2a + b & = & 0 \\ -b & = & \pi^2 \end{array}\right.$ de telle sorte que $\frac{(-1)^k(2a + b) - b}{k^2\pi^2} = \frac{1}{k^2}$ d'où $\boxed{b = -\pi^2}$ puis $\boxed{a = \frac{\pi^2}{2}}$.

3. Par linéarité de l'intégrale, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt &= \frac{a}{2}\int_0^1 t^2dt+\frac{b}{2}\int_0^1 tdt+\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)dt\\
&= \frac{a}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+\frac{b}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\\
&= \frac{a}{6}+\frac{b}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\\
&= \frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{\pi^2}{6}.}
\end{aligned}$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\theta\in]0,\pi[$.
   On a

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(\cos(2k\theta)+i\sin(2k\theta))\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{2ik\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{2i\theta})^k\right).$$

   Puisque $\theta\in]0,\pi[$, on a $2\theta\in]0,2\pi[$ donc $e^{2i\theta}\neq 1$. On reconnaît donc une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(e^{2i\theta})^k &= e^{2i\theta}\frac{1-(e^{2i\theta})^n}{1-e^{2i\theta}}\\
&= e^{2i\theta}\frac{1-e^{2in\theta}}{1-e^{2i\theta}}\\
&= e^{2i\theta}\frac{e^{in\theta}(e^{-in\theta}-e^{in\theta})}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})}\\
&= e^{i(n+1)\theta}\frac{-2i\sin(n\theta)}{-2i\sin(\theta)}\\
&= (\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta))\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$

   En identifiant les parties réelles, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)=\frac{\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ d'où

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)=1+\frac{2\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}=\frac{\sin(\theta)+2\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

   Or, $2\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta)=\sin((n+1)\theta+n\theta)-\sin((n+1)\theta-n\theta)=\sin((2n+1)\theta)-\sin(\theta)$
   d'où $\boxed{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)=\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}$.

5. Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

Puisque $f$ et $t \mapsto \sin(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on peut réaliser une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt &= \left[-\frac{f(t)\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(f(0) - f(1)\cos(\lambda) + \int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right).\end{aligned}$$

Puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la fonction $f'$ est continue sur $[0,1]$ donc $t \mapsto f'(t)\cos(\lambda t)$ est continue sur le segment $[0,1]$.
D'après le théorème des bornes atteintes, cette fonction est donc bornée sur le segment $[0,1]$.
On en déduit qu'il existe un réel $M$ positif tel que pour tout $t \in [0,1]$, $|f'(t)\cos(\lambda t)| \leqslant M$ d'où

$$\left|\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right| \leqslant \int_0^1 |f'(t)\cos(\lambda t)|dt \leqslant \int_0^1 Mdt = M.$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left|f(0) - f(1)\cos(\lambda) + \int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right| &\leqslant |f(0)| + |f(1)\cos(\lambda)| + \left|\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right| \\ &\leqslant |f(0)| + |f(1)| + M\end{aligned}$$

donc la fonction $\lambda \mapsto f(0) - f(1)\cos(\lambda) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui implique que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(0) - f(1)\cos(\lambda) + \int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt}{\lambda} = 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt = 0.}$

6. (a) • Montrons que $f$ admet une limite finie en 0.

On sait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{2} = 0$, donc par composition de limites, on obtient $\sin(\frac{\pi t}{2}) \underset{0}{\sim} \frac{\pi t}{2}$.

Ainsi, $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2(t^2-2t)}{4\times\frac{\pi t}{2}} = \dfrac{\pi(t^2-2t)}{2t} = \dfrac{\pi}{2}(t-2) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\pi$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t) = -\pi$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = -\pi.}$

• On a pour tout $t \in ]0,1]$, $f'(t) = \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{(2t-2)\sin(\frac{\pi t}{2}) - \frac{\pi}{2}(t^2-2t)\cos(\frac{\pi t}{2})}{\sin^2(\frac{\pi t}{2})}$. La fonction $f'$ est continue sur $]0,1]$ comme composée de fonctions continues. Montrons qu'elle admet une limite en 0.

On a

$$\begin{aligned}(2t-2)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \frac{\pi}{2}(t^2-2t)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) &= (2t-2)\left(\frac{\pi t}{2} + o(t^2)\right) - \frac{\pi}{2}(t^2-2t)\left(1+o(t)\right) \\ &= \pi t^2 - \pi t - \frac{\pi}{2}(t^2-2t) + o(t^2) \\ &= \frac{\pi}{2}t^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

donc $(2t-2)\sin(\frac{\pi t}{2}) - \frac{\pi}{2}(t^2-2t)\cos(\frac{\pi t}{2}) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2}t^2$.

De plus, $\sin^2(\frac{\pi t}{2}) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\pi^2}{4}t^2$.

Ainsi, $f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\pi^2}{4} \times \frac{\frac{\pi}{2}t^2}{\frac{\pi^2}{4}t^2} = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{\pi}{2}$.
D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{\pi}{2} = \lim_{t\to 0} f'(t)$, ce qui prouve de plus que $f'$ est continue en 0, donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1].}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in ]0,1]$. Alors $\frac{\pi t}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}] \subset ]0, \pi[$ donc en appliquant la question 4 pour $\theta = \frac{\pi t}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t) = \frac{1}{2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{2\sin(\theta)} = \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi t}{2})}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\boxed{\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt} &= \int_0^1 \left(\frac{\pi^2}{2}t^2 - \pi^2 t\right)\frac{\sin((2n+1)\frac{\pi t}{2})}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin(\frac{\pi t}{2})}\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right)dt \\
&= \boxed{\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)dt}
\end{aligned}$$

où $f$ est la fonction définie en question précédente (qui a bien été prolongée par continuité en 0).

7. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)\pi}{2} = +\infty$. Or, d'après la question 5, puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$ donc par composition de limites, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)dt = 0$, puis grâce à la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt = 0.$$

Or, d'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} = 0$ d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

# Problème : Etude d'une transformation fonctionnelle

## Partie A - Quelques exemples

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in I, f(x) = a$.
   On a alors

$$\boxed{\forall x \in I, T(f)(x)} = \int_0^x \frac{a}{1+t} dt = a[\ln(1+t)]_0^x \boxed{= a\ln(1+x)}.$$

2. On a

$$\boxed{\forall x \in I, T(f)(x)} = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt = \frac{1}{2}[(\ln(1+t))^2]_0^x \boxed{= \frac{1}{2}(\ln(1+x))^2}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x \in I$

$$T(f_{n+1}(x)) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^x t^n \frac{t}{1+t} dt = \int_0^x t^n \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \int_0^x t^n dt - \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

d'où $\boxed{T(f_{n+1})(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - T(f_n)(x).}$

(b) Soit $x \in I$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T(f_n)(x) = (-1)^n \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k}\right).$$

•**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a d'après la première question

$$T(f_0)(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = (-1)^0 \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{0} (-1)^k \frac{x^k}{k}\right),$$

ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $T(f_n)(x) = (-1)^n \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k}\right)$.

D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} T(f_{n+1})(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} - T(f_n)(x) \\ &= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k}\right), \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

On a donc bien montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, T(f_n)(x) = (-1)^n \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k}\right).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre $n$, on trouve

$$T(f_n)(x) \underset{x\to 0}{=} (-1)^n \left( -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right) \underset{x\to 0}{=} O(x^{n+1})$$

d'où $\boxed{T(f_n)(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^{n+1}).}$

4. • Soit $f \in E$. Puisque $f$ est continue sur $I$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on sait que $T(f)$ est l'unique primitive de $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t+1}$ qui s'annule en 0. En particulier, $T(f)$ est continue (car dérivable) sur $I$ donc $T(f) \in E$, ce qui prouve que $T : E \to E$.
   • Vérifions que $T$ est linéaire. Soient $(f,g) \in E^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in I$,
   $$T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \frac{(\lambda f + \mu g)(t)}{1+t} dx = \lambda \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt + \mu \int_0^x \frac{g(t)}{1+t} dt = \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x)$$
   d'où $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$, ce qui prouve que $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E.}$
   • Soit $f \in \ker(T)$. On a pour tout $x \in I, 0 = T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a alors pour tout $x \in I$, $\dfrac{f(x)}{x+1} = (T(f))'(x) = 0$, d'où pour tout $x \in I, f(x) = 0$.
   Réciproquement, il est clair que si $f = 0$, alos $T(f) = 0$ donc $\boxed{\ker(T) = \{0_E\},}$ ce qui prouve que $\boxed{T \text{ est injectif.}}$
   • Montrons que $\mathrm{Im}(T) = \{g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), g(0) = 0\}$ par double inclusion.
   Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$, i.e. il existe $f \in E$ tel que pour tout $x \in I, g(x) = (T(f))(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t+1} dt$. On a bien $g(0) = 0$ et pour tout $x \in I, g'(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$ qui est bien une fonction continue sur $I$ puisque $f$ l'est donc $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
   Réciproquement, soit $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $g(0) = 0$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a pour tout $x \in I, g(x) = \displaystyle\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x \frac{(t+1)g'(t)}{t+1} dt$.
   Or, puisque $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), g'$ est continue sur $I$ donc il en est de même de la fonction $f : x \mapsto (x+1)g'(x)$ et d'après le calcul ci-dessus, on a bien $g = T(f) \in \mathrm{Im}(T)$.
   On a donc bien montré que $\boxed{\mathrm{Im}(T) = \{g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), g(0) = 0\}.}$

## Partie B - Étude d'un cas particulier

5. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $T(f)$ est dérivable sur $I$ et on a pour tout $x \in I, (T(f))'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1} > 0$ donc $\boxed{T(f) \text{ est strictement croissante sur } I.}$

6. Il s'agit de déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x+1}$. Par produit de développements limités, on a
   $$\frac{e^{-x}}{x+1} \underset{x\to 0}{=} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) = 1 - 2x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2).$$

Par primitivation de ce développement limité, on obtient

$$T(f)(x) \underset{x\to 0}{=} T(f)(0) + x - x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3) = \boxed{x - x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).}$$

Par troncature, $T(f)$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0 qui est $T(f)(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ donc la courbe de $T(f)$ admet la droite d'équation $y = x$ pour tangente en 0. Puisque $T(f)(x) - x \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o(x^2)$ avec $-x^2 \leqslant 0$ au voisinage de 0, on en déduit que la courbe de $T(f)$ est située en-dessous de sa tangente en 0.

7. Soit $x \geqslant 0$. On a pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{t+1} \leqslant 1$ donc par croissance de l'intégrale, on a

$$T(f)(x) \leqslant \int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} \leqslant 1,$$

ainsi pour tout $x \geqslant 0, T(f)(x) \leqslant 1$.

Ainsi, la fonction $(T(f))$ est croissante et majorée par 1 sur $I$. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{T(f)(x) \text{ admet une limite finie quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$

8. Pour tout $x \in ]-1, 0]$, on a $-e^{-x} \leqslant -1$ donc par croissance de l'intégrale, on a pour tout $x \in ]-1, 0]$ (attention à l'ordre des bornes !) :

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt = -\int_x^0 \frac{e^{-t}}{t+1}dt \leqslant -\int_x^0 \frac{dt}{t+1} = -[\ln(t+1)]_x^0 = \ln(x+1).$$

Puisque $\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$, on en déduit par comparaison que $\boxed{\lim_{x\to -1^+} T(f)(x) = -\infty.}$

## Partie C - Comportement en $+\infty$

9. (a) On sait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Par définition, il existe alors $A > 0$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[, |f(x)| \leqslant 1$.

Puisque $f$ est continue sur le segment $[0, A]$, d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction $f$ est bornée sur $[0, A]$ donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [0, A], |f(x)| \leqslant M$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant \max(1, M)$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est bornée sur } [0, +\infty[.}$

(b) Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $A > 1$ tel que pour tout $x \geqslant A, |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $x \geqslant A' = e^A > 0$, on a $\ln(x) \geqslant A$ donc pour tout $t \in [\ln(x), x], |f(t)| \leqslant \varepsilon$, ce qui implique que $\alpha(x) \leqslant \varepsilon$.

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A' > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A', 0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \varepsilon$, i.e. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.}$

(c) Soit $x \geqslant 1$. D'après la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on a

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^x \frac{f(t)}{t+1}dt\right| = \left|\int_0^{\ln(x)} \frac{f(t)}{t+1}dt + \int_{\ln(x)}^x \frac{f(t)}{t+1}dt\right| \leqslant \int_0^{\ln(x)} \left|\frac{f(t)}{t+1}\right| dt + \int_{\ln(x)}^x \left|\frac{f(t)}{t+1}\right| dt.$$

Par définition de $M$ et de $\alpha(x)$, on a pour tout $t \in [0, \ln(x)], |f(t)| \leqslant M$ et pour tout $t \in [x, \ln(x)], |f(t)| \leqslant \alpha(x)$ d'où

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, |T(f)(x)| \leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{dt}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^x \frac{dt}{1+t}.}$$

(d) Pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
M\int_0^{\ln x}\frac{dt}{1+t}\ +\ \alpha(x)\int_{\ln x}^{x}\frac{dt}{1+t} &= M[\ln(1+t)]_0^{\ln(x)}+\alpha(x)[\ln(1+t)]_{\ln(x)}^{x}\\
&= M\ln(1+\ln(x))+\alpha(x)(\ln(1+x)-\ln(\ln(x)))\\
&\leqslant M\ln(1+\ln(x))+\alpha(x)\ln(1+x).
\end{aligned}$$

D'une part, on a pour tout $x \geqslant 1, \ln(1+x)=\ln(x(1+\frac{1}{x}))=\ln(x)+\ln(1+\frac{1}{x})$ donc pour tout $x>1$, $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}=1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ puis $\alpha(x)\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par produit de limites (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$.)

D'autre part, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}=0$.

De plus, d'après ce qui précède, et encore par composition de limites, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\ln(x))}{\ln(\ln(x))}=1$ donc finalement

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln(\ln(x))}\times\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}=0.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $x>1$, on a

$$0\leqslant\frac{|T(f)(x)|}{\ln(x)}\leqslant M\frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln(x)}+\alpha(x)\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{T(f)(x)}{\ln(x)}=0$, i.e. $\boxed{T(f)(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(\ln x).}$

10. Posons pour tout $t\in I, g(t)=f(t)-\lambda$. On a bien $g\in E$. De plus, puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lambda$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$.
D'après la question précédente, on sait que $T(g)(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(\ln(x))$.
Or, d'après la question 4, $T$ est linéaire donc pour tout $x\in I, T(g)(x)=T(f)(x)-T(\lambda)(x)$.
Or, d'après la première question, pour l'application constante égale à $\lambda$, on a pour tout $x\in I, T(\lambda)(x)=\lambda\ln(1+x)$.
On a alors $T(f)(x)\underset{x\to+\infty}{=}T(g)(x)+\lambda\ln(1+x)=\lambda\ln(1+x)+o(\ln(x))$.
Or, on a vu dans la question précédente que $\ln(1+x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x)$ donc $\boxed{T(f)(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\lambda\ln(x).}$

11. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, il existe un réel $A>0$ tel que $f(x)\geqslant 1$ pour tout $x>A$.
On alors pour tout $x>A$,

$$T(f)(x)=\int_0^A\frac{f(t)}{t+1}dt+\int_A^x\frac{f(t)}{t+1}dt\geqslant\int_0^A\frac{f(t)}{t+1}dt+\int_A^x\frac{dt}{t+1}=\int_0^A\frac{f(t)}{t+1}dt+\ln(x+1)-\ln(A+1).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$, on en déduit par comparaison que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}T(f)(x)=+\infty.}$

12. (a) Tout d'abord, notons que par positivité de l'intégrale, on a pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \geqslant 0, F_n(x) \geqslant 0$.

Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^{x/2} \underbrace{\frac{e^t}{(t+1)^n}}_{\leqslant e^t} dt + \int_{x/2}^{x} \underbrace{\frac{e^t}{(t+1)^n}}_{\leqslant \frac{e^x}{(t+1)^n}} dt \\ &\leqslant [e^t]_0^{\frac{x}{2}} + e^x \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(t+1)^{n-1}}\right]_{\frac{x}{2}}^{x} \\ &\leqslant e^{\frac{x}{2}} - 1 + \frac{e^x}{n-1}\left(\frac{1}{(\frac{x}{2}+1)^{n-1}} - \frac{1}{(x+1)^{n-1}}\right) \\ &\leqslant e^{\frac{x}{2}} + \frac{e^x}{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{(x+2)^{n-1}} - \frac{1}{(x+1)^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{F_n(x)}{\frac{e^x}{x^{n-2}}} = F_n(x) \times \frac{x^{n-2}}{e^x} \leqslant \frac{x^{n-2}}{e^{\frac{x}{2}}} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{2^{n-1}x^{n-2}}{(x+2)^{n-1}} - \frac{x^{n-2}}{(x+1)^{n-1}}\right).$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$.

Par ailleurs, $\dfrac{x^{n-2}}{(x+2)^{n-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{n-2}}{x^{n-1}} = \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-2}}{(x+2)^{n-1}} = 0$.

De même, $\dfrac{x^{n-2}}{(x+1)^{n-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{n-2}}{x^{n-1}} = \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-2}}{(x+1)^{n-1}} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F_n(x)}{\frac{e^x}{x^{n-2}}} = 0$, i.e.

$$\boxed{F_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^{n-2}}\right).}$$

(b) Soit $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 0$.

Posons $u'(t) = e^t$, $v(t) = \dfrac{1}{(t+1)^n}$, $u(t) = e^t$ et $v'(t) = -\dfrac{n}{(t+1)^{n+1}}$. Les fonctions $u$ et $v$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, on a d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \left[\frac{e^t}{(t+1)^n}\right]_0^x + n\int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^{n+1}} dt \\ &= \frac{e^x}{(x+1)^n} - 1 + nF_{n+1}(x). \end{aligned}$$

On a pour tout $x > 0$, $\dfrac{e^x}{(x+1)^n} \times \dfrac{x^{n-1}}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{(x+1)^n} \times \dfrac{x^{n-1}}{e^x} = 0$, i.e. $\dfrac{e^x}{(x+1)^n} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^x}{x^{n-1}}\right)$.

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{n-1}} = +\infty$ donc $1 \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^x}{x^{n-1}}\right)$.

De plus, d'après la question précédente, on a $F_{n+1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^x}{x^{n-1}}\right)$.

On en déduit bien que $\boxed{F_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^{n-1}}\right).}$

(c) Soit $x>0$. D'après l'intégration par parties faite en question précédente, on a

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{e^x}{x+1} - 1 + F_2(x) \\ &= \frac{e^x}{x+1} - 1 + \left(\frac{e^x}{(x+1)^2} - 1 + 2F_3(x)\right) \\ &= \frac{e^x}{x+1} + \frac{e^x}{(x+1)^2} - 2 + 2\left(\frac{e^x}{(x+1)^3} - 1 + 3F_4(x)\right) \\ &\underset{x\to\infty}{=} \frac{e^x}{x+1} + \frac{e^x}{(x+1)^2} + \frac{2e^x}{(x+1)^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right) \end{aligned}$$

où on a utilisé que $-4+6F_4(x) \underset{x\to\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$ d'après la question précédente.

Faisons un développement limité en $+\infty$ de $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}$ en posant $h = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x(1+\frac{1}{x})} + \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x})^2} + \frac{2}{x^3(1+\frac{1}{x})^3} \\ &\underset{h\to0}{=} h\frac{1}{1+h} + h^2\left(\frac{1}{1+h}\right)^2 + 2h^3\left(\frac{1}{1+h}\right)^3 \\ &\underset{h\to0}{=} h(1-h+h^2+o(h^2)) + h^2(1-2h+o(h)) + 2h^3(1+o(1)) \\ &\underset{h\to0}{=} h + h^3 + o(h^3) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

On en conclut que

$$T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{=} e^x\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} e^x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

d'où $\boxed{T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).}$