
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°7
Samedi 11 avril 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, d'un problème et comporte 4 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : La part du lion

Dans la savane, les lionnes chassent des gazelles et des zèbres pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la proportion de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes ramènent une gazelle est de $2/3$, celle pour qu'elles rapportent un zèbre est de $1/3$. Les repas du lion ne sont composés que d'une proie à chaque fois. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents. On observe le lion sur une assez longue période.

Pour $n \geq 1$, on appelle G_n l'événement : « le lion a mangé une gazelle au n -ème repas observé » et Z_n l'événement : « le lion a mangé un zèbre à ce n -ème repas ».

Pour $n \geq 2$, on note E_n l'événement « le lion a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $(n-1)$ -ème et n -ème repas » et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(E_n)$.

- Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
- Pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère l'événement E_{n+2}^k : « entre le k -ème jour et le $(n+2)$ -ème jour, le lion a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $(n+1)$ -ème et $(n+2)$ -ème repas ». On a donc $E_{n+2}^1 = E_{n+2}$.

Soit $n \geq 2$.

- Justifier que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(E_{n+2}^k) = u_{n-k+3}$.
- Décrire l'événement E_{n+2} à l'aide des événements Z_1, Z_2, G_1, E_{n+2}^2 et E_{n+2}^3 .
- Exprimer $\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2})$ et $\mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2})$ à l'aide de u_{n+1} et u_n .
- En déduire que

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

- Déterminer u_0 et u_1 pour que la relation précédente soit vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Exprimer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, calculer $\int_0^1 t \cos(k\pi t) dt$ et $\int_0^1 t^2 \cos(k\pi t) dt$.
- Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \int_0^1 (at^2 + bt) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{k^2}.$$

- Avec ce couple (a, b) , en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 (at^2 + bt) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\pi t) \right) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\theta \in]0, \pi[$, montrer que

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

6. (a) On considère la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = \frac{\pi^2(t^2 - 2t)}{4 \sin(\frac{\pi t}{2})}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, puis que ce prolongement fait de la fonction f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que $\int_0^1 (at^2 + bt) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\pi t) \right) dt = \int_0^1 f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right) dt$.

7. En utilisant les questions précédentes, conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème : Etude d'une transformation fonctionnelle

On note $E = \mathcal{C}^0(]-1, +\infty[)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$, continues et à valeurs dans \mathbb{R} .

Étant donné un élément $f \in E$, on appelle $T(f)$ l'application de I dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in I, \quad T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt.$$

Partie A - Quelques exemples

- Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application constante égale à $a \in \mathbb{R}$.
- Déterminer $T(f)$ pour l'application :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \ln(t+1) \end{aligned}$$

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : t \mapsto t^n$.

(a) Soit $x \in I$. Trouver une relation entre $T(f_{n+1})(x)$ et $T(f_n)(x)$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$,

$$T(f_n)(x) = (-1)^n \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^k}{k} \right)$$

puis que $T(f_n)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^{n+1})$.

- Vérifier que T est un endomorphisme injectif de E et montrer que

$$\text{Im } T = \{g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), g(0) = 0\}.$$

Partie B - Étude d'un cas particulier

Cette partie est consacrée à l'étude de $T(f)$ lorsque f est définie par $f(t) = e^{-t}$ pour tout $t \in I$.

Ainsi, $\forall x \in I, T(f)(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt$. (On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.)

- Déterminer le sens de variation de la fonction $T(f)$.
- Trouver par primitivation le développement limité de $T(f)$ à l'ordre 3 en 0.
En déduire l'allure locale de la courbe représentative de $T(f)$ au voisinage de 0. (C'est-à-dire : la courbe admet-elle une tangente en 0? Si oui, que dire de la position relative de la courbe et de sa tangente?)
- Montrer que $T(f)$ est majorée, puis que $T(f)(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.
- Déterminer la limite de $T(f)(x)$ lorsque x tend vers -1^+ .
On pourra pour cela établir une minoration ou une majoration de $T(f)(x)$.

Partie C - Comportement en $+\infty$

Dans cette partie, on fixe un élément $f \in E$ et on suppose que f admet en $+\infty$ une limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

On souhaite étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.

9. On suppose dans cette question que $\lambda = 0$.

(a) Démontrer que la fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$.

On notera dans la suite $M = \sup_{t \in [0, +\infty[} |f(t)|$.

(b) Pour $x \geq 1$, on pose $\alpha(x) = \sup \{|f(t)|, t \in [\ln(x), x]\}$ la borne supérieure de $|f|$ sur l'intervalle $[\ln(x), x]$.

Montrer que $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

(c) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a :

$$|T(f)(x)| \leq M \int_0^{\ln x} \frac{dt}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^x \frac{dt}{1+t}.$$

(d) En déduire que $T(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.

10. On suppose dans cette question que $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

On pourra considérer $T(g)$, où g est définie par $g(t) = f(t) - \lambda$ pour tout $t \in I$.

11. On suppose dans cette question que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que $T(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

12. Dans cette question, on considère la fonction f définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in I$.

Ainsi, $T(f)(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt$. (On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.)

On note, pour $n \geq 2$: $F_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^n} dt$.

(a) En découpant $F_n(x) = \int_0^{x/2} \frac{e^t}{(t+1)^n} dt + \int_{x/2}^x \frac{e^t}{(t+1)^n} dt$ et en majorant les deux intégrales, montrer que $F_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^{n-2}}\right)$ pour tout $n \geq 2$.

(b) En intégrant $F_n(x)$ par parties, montrer que $F_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^{n-1}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Déterminer trois constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ telles qu'on ait, au voisinage de $+\infty$:

$$T(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a \frac{e^x}{x} + b \frac{e^x}{x^2} + c \frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).$$