Devoir maison n°14
A rendre pour lundi 4 mai 2026

Problème 1 : Des urnes et des boules

On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3.

On effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose que X_0 suit une loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_0.

Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. Déterminer U_0 et vérifier que pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = MU_n$. En déduire une expression de U_n en fonction de U_0 pour tout entier naturel n.

3. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

   Soit φ l'application définie sur E par
   $$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X).$$

   a) Montrer que φ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

   b) Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on pose
   $$P_k(X) = \frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}.$$
   Montrer que pour tout $k \in [\![0,3]\!]$,
   $$\varphi(P_k) = \left(1 - \frac{2}{3}k\right) P_k.$$

c) Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

Indication : évaluer ces polynômes en des réels bien choisis.

d) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. L'application φ est-elle un automorphisme de E ?

4. On pose

$$Q = \frac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1).$$

a) Ecrire la matrice des coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}'$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2.$$

c) Ecrire la matrice des coordonnées de Q dans la base canonique $\mathcal{B}$.

d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q)).$$

e) A l'aide des résultats des questions précédentes, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0), \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1), \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3).$$

5. Par quelle loi usuelle pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?

Problème 2 : Polynôme à coefficients ± 1, petit en plusieurs points

Soient $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $r \in]0,1[$, et des réels **non tous nuls** :

$$x_1, \ldots, x_m \in [-r, r].$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'il existe un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k X^k, \qquad \varepsilon_k \in \{-1, 1\},$$

tel que P soit simultanément petit en tous les points $x_1, \ldots, x_m$.

On considère des variables aléatoires indépendantes $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ telles que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

que l'on suppose définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$.

On introduit alors le polynôme aléatoire

$$\mathcal{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k X^k.$$

Autrement dit : $\mathcal{P}$ est la variable aléatoire :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P} : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & \omega & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(\omega) X^k. \end{array}$$

Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on pose

$$S_j = \mathcal{P}(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k x_j^k.$$

Autrement dit : S_j est la variable aléatoire :

$$\begin{array}{rccc} S_j : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(\omega) x_j^k. \end{array}$$

On rappelle que la tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(t) = \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}.$$

1. Montrer que la variable aléatoire $\mathcal{P}$ suit une loi uniforme sur un ensemble que l'on déterminera.

2. Soient $u \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(e^{t\varepsilon_k u}) = \operatorname{ch}(tu).$$

3. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \operatorname{th}(t) - t.$$

Montrer que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, puis que

$$\forall t \geq 0, \qquad \operatorname{th}(t) \leq t.$$

4. On pose

$$f(t) = e^{-t^2/2} \operatorname{ch}(t).$$

Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, puis en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

5. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$ et tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}(e^{tS_j}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=0}^{n} x_j^{2k}\right).$$

6. Soient $j \in [\![1, m]\!]$ et $u > 0$.

a) Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$(S_j \geq u) = (\exp(tS_j) \geq \exp(tu)).$$

b) Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(S_j \geq u) \leq \exp\left(-tu + \frac{t^2}{2} \sum_{k=0}^{n} x_j^{2k}\right).$$

Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Markov.

c) On pose

$$V_j = \sum_{k=0}^{n} x_j^{2k}.$$

Montrer que $V_j > 0$, puis en déduire, en choisissant convenablement t, que

$$\mathbb{P}(S_j \geq u) \leq e^{-u^2/(2V_j)}.$$

d) Prouver que les variables aléatoires S_j et $-S_j$ suivent la même loi.

e) Montrer alors que

$$\mathbb{P}(|S_j| \geq u) \leq 2e^{-u^2/(2V_j)}.$$

7. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{n} x_j^{2k} \leq \frac{1}{1 - r^2}.$$

8. En déduire que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}\big(\exists j \in [\![1, m]\!],\ |S_j| \geq u\big) \leq 2m \exp\left(-\frac{u^2(1-r^2)}{2}\right).$$

9. Choisir u de façon que le membre de droite soit strictement inférieur à 1, puis conclure qu'il existe un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_k \in \{-1, 1\},$$

tel que, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$,

$$|P(x_j)| \leq \sqrt{\frac{2\ln(4m)}{1-r^2}}.$$

10. Application numérique. On suppose

$$r = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad m = 50.$$

a) Montrer que $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout x positif, et en déduire que

$$e \geq \frac{5}{2}.$$

b) En déduire que

$$\ln(200) < 6.$$

c) Montrer qu'il existe un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_k \in \{-1, 1\},$$

tel que, pour tout $j \in [\![1, 50]\!]$,

$$|P(x_j)| \leq 4.$$