Liste d'exercices n°23 Variables aléatoires

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X - Y$.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 2$.
Soient $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on considère l'événement $A_k = (X_k \neq X_{k+1})$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1})$ pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ soient deux à deux indépendants.

Exercice 3. Soient n un entier naturel non nul et p un élément de $[0, 1]$.
Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et soit $Y = \dfrac{1}{1 + X}$.
Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 4. Lors d'un TIPE sur le comportement des animaux, des élèves font l'expérience suivante : un rat est placé dans une boîte ayant quatre portes de sortie d'apparence identique. L'une d'elles est dite bonne et les trois autres mauvaises. Chaque fois que le rat choisit une mauvaise porte, il reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte. Il est alors récompensé.
Le groupe de TIPE fait l'hypothèse suivante : le rat a une excellente mémoire. A chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et choisit de façon équiprobable une de celles qu'il n'a pas encore essayées.

1. Déterminer la loi du nombre d'essais T effectués par le rat avec cette hypothèse.
2. Au bout de combien d'essais le rat peut-il espérer sortir ?

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul. On considère n cartes numérotées de 1 à n. On permute au hasard les cartes de ce jeu et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de cartes qui occupent leur place naturelle.
Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on dit que la carte numéro k est à sa place naturelle si c'est la k-ième en partant du haut du paquet.
Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on appelle X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k-ième carte est à sa place et 0 sinon.

1. Donner un lien entre Y et les X_k.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 1$.

Exercice 6. Soit n un entier naturel non nul. On effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note M le plus grand numéro obtenu.
Déterminer la loi de la variable aléatoire M puis calculer son espérance.

Exercice 7. Soit un entier $b \geqslant 2$. Deux urnes A et B contiennent au total b boules à l'instant 0.
A chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on sélectionne une boule au hasard et on la change d'urne.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne A à l'instant n (après le tirage).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{b}\mathbb{E}(X_n)$.
2. Expliciter $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir choisi $2n$ lapins au hasard et un par un dans un enclos. Chaque animal possède indépendamment des autres une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'être un mâle.
Soit C la variable aléatoire égale au nombre de couples mâle-femelle qu'on puisse former arbitrairement avec les $2n$ lapins (attention : C n'est pas le nombre de façons de faire des couples ; par exemple : avec 3 mâles et 5 femelles, on peut faire 3 couples).

1. Si M désigne le nombre de mâles, donner la loi de M puis exprimer C en fonction de M.
2. En déduire la loi de C.
3. Déterminer une expression simple de l'espérance de C via la formule de transfert.

Exercice 9. Soit $n \geqslant 1$.
Soient $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Posons pour tout entier naturel $k \in [\![1, n-1]\!], Y_k = X_k X_{k+1}, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} Y_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(V_n)$.
2. Calculer $V(S_n)$ et $V(V_n)$.
3. Calculer $\text{Cov}(S_n, V_n)$.

Exercice 10. Soit $p \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$.
On considère m variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_m$ telles que pour tout $k \in [\![1, m]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{m} n_k, p\right)$.