Liste d'exercices n°24 — Déterminants

Exercice 1. Soit n un entier naturel impair. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\det(A) = 0$.

Exercice 2. Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \neq p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(AB) = 0$ ou $\det(BA) = 0$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta) \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta) \end{vmatrix}$

Exercice 6. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

Exercice 7. Soient p et m deux entiers naturels avec $p \leqslant m$. Calculer

$$D(m,p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \dots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On considère la matrice $\Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $\det(A\Omega)$ et en déduire que

$$\det(A) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})$$

où $P = a_1 + a_2 X + \dots + a_n X^{n-1}$.

Exercice 9. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, on définit le déterminant de taille $n \times n$:

$$D_n(a,b,c) := \det \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D_2(a,b,c)$ et $D_3(a,b,c)$. Par convention on estime que $D_1(a,b,c) = a$.
2. En développant par rapport à la première colonne, établir la relation de récurrence

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

3. En déduire un calcul de $D_n(1,1,-1)$.

Exercice 10.

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soient P_1 et P_2 deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P = P_1 + iP_2$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $P_1 + xP_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
   Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

Exercice 11. Calculer le déterminant de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \\ M & \longmapsto & M^T. \end{array}$$

Exercice 12.
Soit $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$.

1. Montrer que $\det(A) = 0$.
2. Montrer que $A = 0$.