

Corrigé de la liste d'exercices n°23

Variables aléatoires

Exercice 1.

1. On a $(X = Y) = \bigsqcup_{k=1}^n ((X = k) \cap (Y = k))$ donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k)$$

par indépendance des variables aléatoires X et Y .

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

2. • On a $(X \geq Y) = \bigsqcup_{k=1}^n ((X = k) \cap (Y \leq k))$ donc

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((X = k) \cap (Y \leq k)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y \leq k)$$

par indépendance de X et Y d'où $\mathbb{P}(X \geq Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$.

• Autre méthode : On a $\mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X < Y) = 1$. Or, par symétrie de X et Y , on a $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y)$ donc $\mathbb{P}(X = Y) + 2\mathbb{P}(X > Y) = 1$ d'où $\mathbb{P}(X > Y) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(X = Y)) = \frac{n-1}{2n}$.

Finalement, $\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$.

3. La variable aléatoire $X - Y$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1 - n, n - 1 \rrbracket$ et on a pour tout $k \in \llbracket 1 - n, n - 1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - Y = k) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((Y = i) \cap (X = i + k)) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X = i + k) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i + k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{n+k} \mathbb{P}(X = j). \end{aligned}$$

• Si $k \leq 0$, on obtient $\mathbb{P}(X - Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+k} \mathbb{P}(X = j) = \frac{n+k}{n^2}$.

- Si $k \geq 0$, on obtient $\mathbb{P}(X - Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n \mathbb{P}(X = j) = \frac{n-k}{n^2}$.

Finalement, pour tout $k \in \llbracket 1-n, n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X - Y = k) = \frac{n-|k|}{n^2}$.

Exercice 2.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$.

On a $A_k \cap A_{k+1} = (X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) \cup (X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1)$.

Ces deux événements étant incompatibles, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) &= \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_k = 0)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)\mathbb{P}(X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 0)\mathbb{P}(X_{k+2} = 1) \text{ (indépendance)} \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p). \end{aligned}$$

2. Si les événements $(A_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ sont deux à deux indépendants, alors nécessairement, pour tout $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1})$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0) = 2p(1-p)$.

On a donc $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1}) \Leftrightarrow p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$.

Puisque $p(1-p) \neq 0$, ceci équivaut à $4p(1-p) = 1$ d'où $p = \frac{1}{2}$.

De plus, si $|i-j| > 1$, les événements $A_i = (X_i \neq X_{i+1})$ et $A_j = (X_j \neq X_{j+1})$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions quelle que soit la valeur de p puisque les variables aléatoires $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes

Ainsi, les événements $(A_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ sont deux à deux indépendants si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. On a $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ donc $Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{1+k}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

on a

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{1+k}\right) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \end{aligned}$$

- Si $p = 0$, on a $\mathbb{E}(Y) = 1$.

- Si $p \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
 &= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right) \\
 &= \frac{(p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)} \\
 &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. On a $T(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, notons A_k l'événement :« Le rat choisit la bonne porte au k -ème essai ».

$$\text{On a } \mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ensuite, } \mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

De même, $\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1})$ et d'après la formule des probabilités composées, on obtient

$$\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Enfin, puisque $\mathbb{P}(T = 1) + \mathbb{P}(T = 2) + \mathbb{P}(T = 3) + \mathbb{P}(T = 4) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(T = 4) = \frac{1}{4}$.

Ainsi, T suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

2. On a $\mathbb{E}(T) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$. Ainsi, le rat peut espérer sortir au bout de trois essais.

Exercice 5.

1. Puisque Y compte le nombre de cartes bien placées, on a $Y = \sum_{k=1}^n X_k$.

2. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$.

Par définition de l'espérance, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{E}(X_k) = 1 \times \mathbb{P}(X_k = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1).$$

Par définition, $\mathbb{P}(X_k = 1)$ est la probabilité que la k -ème carte soit bien placée.

Dénombrons les permutations qui laissent fixes la k -ème carte. Puisque la position de la k -ème carte est imposée, il reste à permuter les $n-1$ autres cartes, ce qui donne $(n-1)!$ permutations qui laissent fixes la k -ème carte.

Puisqu'il y a $n!$ permutations de l'ensemble des n cartes, la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ donc}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Exercice 6. Soit $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Notons T_1 et T_2 les variables aléatoires égales aux numéros obtenus aux premier et deuxième tirage respectivement.

Les variables aléatoires T_1 et T_2 suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on a $M = \max(T_1, T_2)$.

La variable aléatoire M est définie sur Ω^2 et on a $M(\Omega^2) = \Omega$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$(M = k) = ((T_1 = k) \cap (T_2 \leq k - 1)) \cup ((T_1 \leq k - 1) \cap (T_2 = k)) \cup ((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$

Puisque c'est une union d'événements deux à deux incompatibles, on obtient

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 \leq k - 1)) + \mathbb{P}((T_1 \leq k - 1) \cap (T_2 = k)) + \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$

Les tirages étant indépendants, les variables aléatoires T_1 et T_2 le sont également et on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = k) &= \mathbb{P}(T_1 = k)\mathbb{P}(T_2 \leq k - 1) + \mathbb{P}(T_1 \leq k - 1)\mathbb{P}(T_2 = k) + \mathbb{P}(T_1 = k)\mathbb{P}(T_2 = k) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{k - 1}{n} + \frac{k - 1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2k - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(M = k) = \sum_{k=1}^n \frac{2k^2 - k}{n^2} = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

d'où

$$\mathbb{E}(M) = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 3n^2 - 3n}{6n^2} = \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $X_n(\Omega) = \llbracket 0, b \rrbracket$ et $(X_{n+1} - X_n)(\Omega) = \{-1, 1\}$.

En utilisant la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(X_n = k)_{0 \leq k \leq b}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) &= \sum_{k=0}^b \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} - X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^b \frac{b-k}{b} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^b \mathbb{P}(X_n = k) - \frac{1}{b} \sum_{k=0}^b k\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= 1 - \frac{\mathbb{E}(X_n)}{b}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = \frac{\mathbb{E}(X_n)}{b}$ et on obtient

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \frac{2}{b}\mathbb{E}(X_n).$$

2. Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n)$ d'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{b}\right) \mathbb{E}(X_n).$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe $\frac{b}{2}$ donc pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = \left(1 - \frac{2}{b}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}.$$

Puisque $b \geq 2$, on a $\left|1 - \frac{2}{b}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{b}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{b}{2}$.

Exercice 8.

1. Le choix des lapins consiste en $2n$ expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ donc M suit une loi binomiale de paramètres $(2n, \frac{1}{2})$.

Par ailleurs, s'il y a M mâles, il y a $2n - M$ femelles et le nombre de couples qu'on peut former est le minimum entre le nombre de mâles et de femelles donc $C = \min(M, 2n - M)$.

2. La variable aléatoire C est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}((M = k) \cup (2n - M = k)) = \mathbb{P}((M = k) \cup (M = 2n - k)).$$

• Si $k \neq n$, alors les événements $(M = k)$ et $(M = 2n - k)$ sont incompatibles donc

$$\mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}(M = k) + \mathbb{P}(M = 2n - k) = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} + \binom{2n}{2n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n-1}}.$$

• Si $k = n$, on obtient

$$\mathbb{P}(C = n) = \mathbb{P}(M = n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

3. D'après la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C) &= \sum_{k=0}^{2n} \min(k, 2n - k) \mathbb{P}(M = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n - k) \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left(2n \sum_{k=0}^n \binom{2n-1}{k-1} + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n - k) \binom{2n}{2n-k} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left(2n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} 2n \binom{2n-1}{2n-k-1} \right) \\ &= \frac{n}{2^{2n-1}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n-1}{k} \right) \\ &= \frac{n}{2^{2n-1}} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} - \binom{2n-1}{n} \right) \\ &= \frac{n(2^{2n-1} - \binom{2n-1}{n})}{2^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Exercice 9.

1. Tout d'abord, on remarque que S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) puisque c'est une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p donc $\mathbb{E}(S_n) = np$.

Par ailleurs, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k X_{k+1})$. Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les variables aléatoires X_k et X_{k+1} sont indépendantes donc $\mathbb{E}(X_k X_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Finalement, on a $\mathbb{E}(V_n) = (n-1)p^2$.

2. Puisque $S_n \leftrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on a $V(S_n) = np(1-p)$.

$$\text{On a } V(V_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n-1} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} V(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$V(Y_k) = \mathbb{E}(Y_k^2) - \mathbb{E}(Y_k)^2 = \mathbb{E}(X_k^2 X_{k+1}^2) - p^4 = \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(X_{k+1}) - p^4 = p^2 - p^4.$$

On remarque que si $j > i + 1$, $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions donc $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ si $j > i + 1$.

Si $j = i + 1$, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) &= \text{Cov}(X_i X_{i+1}, X_{i+1} X_{i+2}) \\ &= \mathbb{E}(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) - \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) \mathbb{E}(X_i X_{i+2}) \\ &= \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_{i+1}) \mathbb{E}(X_{i+2}) - \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_{i+1})^2 \mathbb{E}(X_{i+2}) \\ &= p^3 - p^4. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$V(V_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (p^2 - p^4) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = (n-1)p^2(1-p^2) + 2(n-2)p^3(1-p).$$

3. Par bilinéarité de la covariance, on a

$$\text{Cov}(S_n, V_n) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^{n-1} Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_i, Y_j).$$

Si $i \notin \{j, j+1\}$, alors X_i et $Y_j = X_j X_{j+1}$ sont indépendantes donc $\text{Cov}(X_i, Y_j) = 0$.

$$\text{On a donc } \text{Cov}(S_n, V_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_j, Y_j) + \text{Cov}(X_{j+1}, Y_j).$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$\text{Cov}(X_j, Y_j) = \mathbb{E}(X_j Y_j) - \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(Y_j) = \mathbb{E}(X_j^2 X_{j+1}) - p^3 = \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_{j+1}) = p^2 - p^3 = p^2(1-p)$$

en utilisant que $X_j^2 = X_j$ et par indépendance de X_j et X_{j+1} et

$$\text{Cov}(X_{j+1}, Y_j) = \mathbb{E}(X_{j+1} Y_j) - \mathbb{E}(X_{j+1}) \mathbb{E}(Y_j) = \mathbb{E}(X_j X_{j+1}^2) - p \times p^2 = \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_{j+1}) = p^2 - p^3 = p^2(1-p)$$

donc finalement

$$\text{Cov}(S_n, V_n) = 2(n-1)p^2(1-p).$$

Exercice 10. • Montrons d'abord le résultat dans le cas où $m = 2$. On considère donc deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.

Montrons que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Tout d'abord, puisque $X_1(\Omega) = \llbracket 0, n_1 \rrbracket$ et $X_2(\Omega) = \llbracket 0, n_2 \rrbracket$, on a bien $(X_1 + X_2)(\Omega) = \llbracket 0, n_1 + n_2 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n_1 + n_2 \rrbracket$, on a

$$(X_1 + X_2 = k) = \bigsqcup_{\substack{0 \leq i \leq n_1 \\ 0 \leq j \leq n_2 \\ i+j=k}} (X_1 = i, X_2 = j)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n_1 \\ 0 \leq j \leq n_2 \\ i+j=k}} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n_1 \\ 0 \leq j \leq n_2 \\ i+j=k}} \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(X_2 = j) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n_1 \\ 0 \leq j \leq n_2 \\ i+j=k}} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j} \\ &= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n_1 \\ 0 \leq j \leq n_2 \\ i+j=k}} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} \end{aligned}$$

Or, on a vu dans le TD « Dénombrement » que $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n_1 \\ 0 \leq j \leq n_2 \\ i+j=k}} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} = \binom{n_1 + n_2}{k}$

donc $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$.

On reconnaît une loi binomiale de paramètres $(n_1 + n_2, p)$ donc $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

• Montrons maintenant par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ le résultat souhaité.

Initialisation : si $m = 1$, la propriété est triviale.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang m et montrons-le au rang $m + 1$.

Pour cela, considérons $m + 1$ variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_m, X_{m+1} telles que pour tout $k \in \llbracket 1, m + 1 \rrbracket$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^m X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^m n_k, p\right)$.

D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\sum_{k=1}^m X_k$ et X_{m+1} sont indépendantes. On

déduit alors du cas $m = 2$ fait précédemment que, puisque $\sum_{k=1}^m X_k$ et X_{m+1} sont indépendantes

et que $\sum_{k=1}^m X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^m n_k, p\right)$ et $X_{m+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n_{m+1}, p)$, alors

$$\sum_{k=1}^{m+1} X_k = \sum_{k=1}^m X_k + X_{m+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^m n_k + n_{m+1}, p\right) = \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{m+1} n_k, p\right),$$

ce qui prouve la propriété au rang $m + 1$ et achève la récurrence.