Corrigé du DM commun MPSI2-PCSI

Corrigé du problème 1

1. Pour tout $k \in [\![0, 3]\!], \mathbb{P}(X_0 = k) = \dfrac{1}{4}$. On a alors
$$\mathbb{E}(X_0) = \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) = \frac{6}{4}$$
d'où $\boxed{\mathbb{E}(X_0) = \dfrac{3}{2}.}$
D'après la formule de König-Huygens, $V(X_0) = \mathbb{E}(X_0^2) - \mathbb{E}(X_0)^2$. Par ailleurs, d'après la formule de transfert :
$$\mathbb{E}(X_0^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{1}{4}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$
Ainsi, $V(X_0) = \mathbb{E}(X_0^2) - \mathbb{E}(X_0)^2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{4}$ d'où $\boxed{V(X_0) = \dfrac{5}{4}.}$

2. Par définition, on a $\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_1 = 0) \\ \mathbb{P}(X_2 = 0) \\ \mathbb{P}(X_3 = 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.}$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque X_n peut prendre comme valeurs tous les entiers entre 0 et 3, les événements $(X_n = k)_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ forment un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales dans ce système complet d'événements, on a
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 0).$$
Puisqu'on change une boule d'urne à chaque étape, pour qu'il y ait 0 boule dans l'urne A après $n + 1$ étapes, il y avait nécessairement 1 boule dans l'urne A après n étapes, donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 0) = 0$.
On a donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$. Enfin, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ représente la probabilité d'avoir retiré une boule dans l'urne A, sachant que celle-ci ne contenait qu'une boule. C'est donc la probabilité d'avoir tiré le bon nombre entre 1 et 3, d'où $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}$.
On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1).}$
De manière symétrique, on a
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 3) = \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3),$$

puisque pour avoir 3 boules dans l'urne A après $n+1$ étapes, il y avait nécessairement 2 boules dans l'urne A après n étapes.

Enfin, $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)$ représente la probabilité d'avoir retiré une boule dans l'urne B, sachant que celle-ci ne contenait qu'une boule. C'est donc la probabilité d'avoir tiré le bon nombre entre 1 et 3, d'où $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=\dfrac{1}{3}$.

On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=3)=\dfrac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=2).}$

Toujours d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_n=k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=1).$$

Pour qu'il y ait 1 boule dans l'urne A après $n+1$ étapes, il faut qu'il y ait 0 ou 2 boules dans l'urne A après n étapes donc $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)=0$ et on a donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=0)\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)+\mathbb{P}(X_n=2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1).$$

Le nombre $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$ représente la probabilité d'avoir rajouté une boule dans l'urne A après l'étape $n+1$ sachant qu'il n'y avait pas de boule dans l'urne A après n étapes. Dans ce cas, le nombre choisi à l'étape $n+1$ est forcément le nombre d'une boule qui se trouve dans l'urne B (puisqu'elles y sont toutes) donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1$.

De même, le nombre $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$ représente la probabilité d'avoir tiré une boule dans l'urne A après la n-ème étape, alors que celle-ci en contenait 2.

On a donc $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=0)+\dfrac{2}{3}\mathbb{P}(X_n=2).}$

En raisonnant de même, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_n=k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=2)\\ &= \mathbb{P}(X_n=1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)+\mathbb{P}(X_n=3)\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_n=2)\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\dfrac{2}{3}\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_n=3).}$

Finalement, on a

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_{n+1}=0)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\\ \mathbb{P}(X_n=2)\\ \mathbb{P}(X_n=3)\end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout}\, n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=MU_n.}$

On en déduit par une récurrence immédiate que $\boxed{\text{pour tout}\, n\in\mathbb{N}, U_n=M^nU_0.}$

3. (a) Pour tout $P\in E, \varphi(P)\in\mathbb{R}[X]$ donc $\varphi : E\to\mathbb{R}[X]$.
   - Montrons que φ est linéaire.

Soient $(P,Q) \in E^2$, soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)(X) + \frac{1}{3}(1-X^2)(\lambda P + \mu Q)'(X) \\
&= \lambda X P(X) + \mu X Q(X) + \frac{1}{3}(1-X^2)(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) \\
&= \lambda(XP(X) + \frac{1}{3}(1-X^2)P'(X)) + \mu(XQ(X) + \frac{1}{3}(1-X^2)Q'(X)) \\
&= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)
\end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

• Vérifions que φ est un endomorphisme de E. Pour cela, puisqu'on sait déjà que φ est linéaire, il suffit de vérifier que $\varphi : E \longrightarrow E$, i.e. que $\varphi(E) \subset E$.

Par définition, on a $\varphi(1) = X, \varphi(X) = X^2 + \frac{1}{3}(1-X^2) = \frac{2}{3}X^2 + \frac{1}{3}$,

$$\varphi(X^2) = X^3 + \frac{1}{3}(1-X^2) \times 2X = \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{3}X$$

et

$$\varphi(X^3) = X^4 + \frac{1}{3}(1-X^2) \times 3X^2 = X^2.$$

On remarque que $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) \in E^4$. Ainsi, puisque $1, X, X^2, X^3$ est une base de E, on a

$$\varphi(E) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) \subset E$$

donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

D'après les calculs faits précédemments, la matrice de φ dans la base canonique de E est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = M.}$$

(b) • On a $P_0 = \frac{1}{8}(X+1)^3 = \frac{1}{8}(X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$.

Par linéarité de φ, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(P_0) &= \frac{1}{8}\big(\varphi(X^3) + 3\varphi(X^2) + 3\varphi(X) + 3\varphi(1)\big) \\
&= \frac{1}{8}\big(X^2 + X^3 + 2X + 2X^2 + 1 + X\big) \\
&= P_0
\end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_0) = (1 - \frac{2}{3} \times 0)P_0$.

• On a $P_1 = \frac{1}{8}(X-1)(X+1)^2 = \frac{1}{8}(X-1)(X^2+2X+1) = \frac{1}{8}(X^3 + X^2 - X - 1)$.

Par linéarité de φ, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1) &= \frac{1}{8}(\varphi(X^3) + \varphi(X^2) - \varphi(X) - \varphi(1)) \\
&= \frac{1}{8}\left(X^2 + \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{3}X - \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{3} - X\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}P_1
\end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_1) = (1 - \frac{2}{3} \times 1)P_1$.

• On a $P_2 = \dfrac{1}{8}(X-1)^2(X+1) = \dfrac{1}{8}(X^2 - 2X + 1)(X+1) = \dfrac{1}{8}(X^3 - X^2 - X + 1)$.
Par linéarité de φ, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(P_2) &= \frac{1}{8}(\varphi(X^3) - \varphi(X^2) - \varphi(X) + \varphi(1)) \\
&= \frac{1}{8}\left(X^2 - \frac{1}{3}X^3 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{3} + X\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{3}P_2
\end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_2) = (1 - \frac{2}{3} \times 2)P_2$.

• Enfin, $P_3 = \dfrac{1}{8}(X-1)^3 = \dfrac{1}{8}(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$.
Par linéarité de φ, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(P_3) &= \frac{1}{8}(\varphi(X^3) - 3\varphi(x^2) + 3\varphi(X) - 3\varphi(1)) \\
&= \frac{1}{8}(X^2 - X^3 - 2X + 2X^2 + 1 - X) \\
&= \frac{1}{8}(-X^3 + X^2 - 3X + 1) \\
&= -P_3
\end{aligned}$$

et on a bien $\varphi(P_3) = (1 - \frac{2}{3} \times 3)P_3$.

Finalement, on a bien $\boxed{\text{pour tout}\, k \in [\![0,3]\!], \varphi(P_k) = \left(1 - \dfrac{2}{3}k\right) P_k.}$

(c) • Montrons que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre.

Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_k P_k = 0$, i.e. $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{pour tout}\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{3} a_k P_k(x) = 0.$$

En évaluant cette égalité en 1, puisque $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = 0$, on obtient $a_0 P_0(1) = 0$. Or, $P_0(1) \neq 0$ donc $a_0 = 0$.
De même, en évaluant cette égalité en -1, puisque $P_1(-1) = P_2(-1)$, on obtient $a_3 P_3(-1) = 0$. Or, $P_3(-1) \neq 0$ donc $a_3 = 0$.
Il reste alors $a_1 P_1 + a_2 P_2 = 0$.
En évaluant cette égalité en 0, on obtient $a_1 P_1(0) + a_2 P_2(0) = 0$, i.e. $-\frac{1}{8}a_1 + \frac{1}{8}a_2 = 0$ d'où $a_1 = a_2$.
Enfin, en évaluant cette égalité en 2, on obtient $a_1 P_1(2) + a_2 P_2(2) = 0$, i.e. $\dfrac{9}{8}a_1 + \dfrac{3}{8}a_2 = 0$. Puisque $a_1 = a_2$, on en conclut que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ donc la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille libre à 4 vecteurs de E.
Or, $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ donc $\boxed{(P_0, P_1, P_2, P_3)\, \text{est une base de}\, E.}$

(d) D'après les résultats obtenus en question précédente, on a donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

C'est une matrice diagonale dont les cœfficients diagonaux sont tous non nuls, ce qui implique que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ est inversible, et on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E.}$

4. (a) On remarque (en lisant l'énoncé de la question suivante...) que $Q = P_0 + P_2$ donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi^n(Q)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi^n)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi))^n\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q)$.

Or, d'après la question 4.(d), $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi))^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi^n(Q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2.}$

(c) On a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = U_0.}$

(d) D'après la question 3, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = M^n U_0$. Or, on vient de voir que $U_0 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q)$ et on sait d'après la question 3.(a) que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ donc

$$U_n = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))^n\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q))$$

donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q)).}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question 5.(b) que $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_0) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Puisque $U_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(Q))$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1 + (-\frac{1}{3}^n)) \\ \frac{1}{8}(3 - (-\frac{1}{3}^n)) \\ \frac{1}{8}(3 - (-\frac{1}{3}^n)) \\ \frac{1}{8}(1 + (-\frac{1}{3}^n)) \end{pmatrix}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{8}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}^n\right)\right)$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{8}\left(3 - \left(-\frac{1}{3}^n\right)\right).$$

Puisque $|-\frac{1}{3}| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et on obtient

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{3}{8}.}$$

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $(3, \frac{1}{2})$. On a pour tout $k \in [\![0, 3]\!], \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{3}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-k} = \dfrac{1}{8}\dbinom{3}{k}$ donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

On reconnaît les limites trouvées en question précédente.

$$\boxed{\text{On peut donc approcher la loi de } X_n \text{ pour une grande valeur de } n \text{ par une loi binomiale } \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right).}$$

Corrigé du problème 2

On conserve les notations de l'énoncé :

$$\mathcal{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k X^k, \qquad S_j = \mathcal{P}(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k x_j^k.$$

Les variables aléatoires $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ sont indépendantes et vérifient

$$\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On rappelle aussi que

$$\mathrm{th}(t) = \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}.$$

1. On a $\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \{-1, 1\}^{n+1} \right\}$.

   Par indépendance des variables aléatoires $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$, pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in X(\Omega)$, on a
   $$\mathbb{P}(\mathcal{P} = P) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} (\varepsilon_k = a_k) \right) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\epsilon_k = a_k) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$
   donc $\mathcal{P}$ suit une loi uniforme sur $\mathcal{P}(\Omega)$ (qui est bien de cardinal 2^{n+1}).
2. Par la formule de transfert,
   $$\mathbb{E}(e^{t\varepsilon_k u}) = \frac{1}{2} e^{tu} + \frac{1}{2} e^{-tu} = \mathrm{ch}(tu).$$
3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
   $$g'(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} - 1 \leq 0.$$
   Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme
   $$g(0) = \mathrm{th}(0) - 0 = 0,$$
   on en déduit
   $$\forall t \geq 0, \qquad g(t) \leq 0,$$
   c'est-à-dire
   $$\forall t \geq 0, \qquad \mathrm{th}(t) \leq t.$$
4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
   $$f'(t) = e^{-t^2/2} \big(\mathrm{sh}(t) - t\,\mathrm{ch}(t) \big).$$
   On factorise par $\mathrm{ch}(t) > 0$:
   $$f'(t) = e^{-t^2/2}\,\mathrm{ch}(t) \big(\mathrm{th}(t) - t \big).$$
   D'après la question précédente, $\mathrm{th}(t) - t \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc
   $$f'(t) \leq 0.$$

Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme

$$f(0) = 1,$$

on obtient

$$\forall t \geq 0, \qquad e^{-t^2/2}\,\mathrm{ch}(t) \leq 1,$$

soit

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathrm{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

Les deux membres étant pairs, cette inégalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5. Par indépendance des ε_k,

$$\mathbb{E}(e^{tS_j}) = \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{k=0}^n \varepsilon_k x_j^k}\right) = \prod_{k=0}^n \mathbb{E}(e^{t\varepsilon_k x_j^k}).$$

D'après la question 1,

$$\mathbb{E}(e^{t\varepsilon_k x_j^k}) = \mathrm{ch}(tx_j^k),$$

et, d'après la question 3,

$$\mathrm{ch}(tx_j^k) \leq e^{t^2 x_j^{2k}/2}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(e^{tS_j}) \leq \prod_{k=0}^n e^{t^2 x_j^{2k}/2} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=0}^n x_j^{2k}\right).$$

6. Soient $j \in [\![1, m]\!]$ et $u > 0$.
   (a) Soit $t > 0$. Par stricte croissance de l'application $\omega \mapsto \exp(t\omega)$, on a bien

   $$(S_j \geqslant u) = \{\omega \in \Omega, S_j(\omega) \geqslant u\} = \{\omega \in \Omega, \exp(tS_j(\omega)) \geqslant \exp(tu)\} = (\exp(tS_j) \geqslant \exp(tu)).$$

   (b) Pour tout $t > 0$, l'inégalité de Markov donne

   $$\mathbb{P}(S_j \geq u) = \mathbb{P}(e^{tS_j} \geq e^{tu}) \leq e^{-tu}\mathbb{E}(e^{tS_j}).$$

   En utilisant la question 5,

   $$\mathbb{P}(S_j \geq u) \leq \exp\left(-tu + \frac{t^2}{2}\sum_{k=0}^n x_j^{2k}\right).$$

   (c) Posons

   $$V_j = \sum_{k=0}^n x_j^{2k}.$$

   Comme le terme d'indice 0 vaut 1, on a

   $$V_j \geq 1,$$

   donc $V_j > 0$.
   La majoration précédente s'écrit

   $$\mathbb{P}(S_j \geq u) \leq e^{-tu+t^2V_j/2}.$$

   Le second membre est minimal pour

   $$t = \frac{u}{V_j},$$

   ce qui donne

   $$\mathbb{P}(S_j \geq u) \leq e^{-u^2/(2V_j)}.$$

(d) Comme les variables $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ sont indépendantes et symétriques, la famille

$$(-\varepsilon_0, \ldots, -\varepsilon_n)$$

a même loi que

$$(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n).$$

Par conséquent,

$$-S_j = \sum_{k=0}^{n} (-\varepsilon_k) x_j^k$$

a même loi que S_j.

(e) Ainsi, pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}(S_j \leq -u) = \mathbb{P}(-S_j \geq u) = \mathbb{P}(S_j \geq u).$$

Or les événements $\{S_j \geq u\}$ et $\{S_j \leq -u\}$ sont disjoints, donc

$$\mathbb{P}(|S_j| \geq u) = \mathbb{P}(S_j \geq u) + \mathbb{P}(S_j \leq -u) = 2\mathbb{P}(S_j \geq u).$$

On en déduit, grâce à la question précédente,

$$\mathbb{P}(|S_j| \geq u) \leq 2e^{-u^2/(2V_j)}.$$

7. Comme $|x_j| \leq r < 1$, on a $x_j^2 \neq 1$ et la formule de la somme géométrique finie donne

$$\sum_{k=0}^{n} x_j^{2k} = \frac{1 - x_j^{2n+2}}{1 - x_j^2}.$$

Or $0 \leq x_j^{2n+2} \leq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} x_j^{2k} \leq \frac{1}{1 - x_j^2}.$$

Enfin, comme $x_j^2 \leq r^2$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} x_j^{2k} \leq \frac{1}{1 - r^2}.$$

8. D'après les questions 6.e) et 7, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$,

$$\mathbb{P}(|S_j| \geq u) \leq 2\exp\left(-\frac{u^2(1 - r^2)}{2}\right).$$

Par réunion,

$$\mathbb{P}\big(\exists j \in [\![1, m]\!],\ |S_j| \geq u\big) \leq \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(|S_j| \geq u) \leq 2m\exp\left(-\frac{u^2(1 - r^2)}{2}\right).$$

9. On choisit

$$u = \sqrt{\frac{2\ln(4m)}{1 - r^2}}.$$

Alors

$$2m\exp\left(-\frac{u^2(1 - r^2)}{2}\right) = 2me^{-\ln(4m)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Donc

$$\mathbb{P}\big(\forall j \in [\![1, m]\!],\ |S_j| < u\big) > 0.$$

Il existe donc une issue ω telle que

$$\forall j \in [\![1, m]\!], \qquad |S_j(\omega)| < u.$$

Pour cette issue ω, on pose

$$a_k = \varepsilon_k(\omega) \in \{-1, 1\}, \qquad P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Alors, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$,

$$P(x_j) = S_j(\omega),$$

donc

$$|P(x_j)| < u \leq \sqrt{\frac{2\ln(4m)}{1 - r^2}}.$$

10. (a) On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto e^x$ entre 0 et 1, à l'ordre 1 :

$$e = 1 + 1 + \int_0^1 (1 - t)e^t\, dt.$$

Comme $e^t \geq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, on obtient

$$e \geq 1 + 1 + \int_0^1 (1 - t)\, dt = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

(b) Par suite,

$$e^6 \geq \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \frac{15625}{64} > 200.$$

Ainsi

$$\ln(200) < 6.$$

(c) Ici,

$$r = \frac{1}{2}, \qquad m = 50,$$

donc

$$\sqrt{\frac{2\ln(4m)}{1 - r^2}} = \sqrt{\frac{2\ln(200)}{1 - 1/4}} = \sqrt{\frac{8}{3}\ln(200)}.$$

Comme $\ln(200) < 6$, il vient

$$\frac{8}{3}\ln(200) < 16,$$

donc

$$\sqrt{\frac{8}{3}\ln(200)} < 4.$$

Il existe donc un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_k \in \{-1, 1\},$$

tel que, pour tout $j \in [\![1, 50]\!]$,

$$|P(x_j)| \leq 4.$$