25

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

25.1 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

25.1.1 Produit scalaire

Définition 1: Produit scalaire

On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. (Bilinéarité) : pour tout $x \in E$, l'application $y \to \varphi(x, y)$ est linéaire sur E et pour tout $y \in E$, l'application $x \to \varphi(x, y)$ est linéaire sur E;
2. (Symétrie) Pour tout $(x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
3. (Positivité) Pour tout $x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$;
4. (Définition) $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

(On dit qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.)
Dans les faits, on note souvent $\langle x, y\rangle, (x|y)$ ou $x.y$ plutôt que $\varphi(x, y)$.
Si E est muni d'un produit scalaire, on dit que $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.
En outre, si E est de plus de dimension finie, on dit que $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien.

Exemple 1. 1. On définit le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices des coordonnées respectives de $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on remarque que

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = X^T Y.$$

2. On définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B).$$

En effet, cette application est clairement bilinéaire (en utilisant la linéarité de la trace).

Elle est symétrique :

$$\langle B, A\rangle = \mathrm{Tr}(B^T A) = \mathrm{Tr}((B^T A)^T) = \mathrm{Tr}(A^T B) = \langle A, B\rangle.$$

Elle est définie positive : soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Alors

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}(A^T A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A^T)_{i,j}a_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geq 0$$

et on a $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

3. On définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ par

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) et symétrique.
Par positivité de l'intégrale, on a $(f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(t)dt \geq 0$. De plus, f^2 est une fonction positive et continue sur $[a,b]$ donc on a

$$\int_a^b f^2(t)dt = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Ainsi, cette application est bien définie et positive.

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On définit de même un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)dt.$$

La bilinéarité, la symétrie et la positivité se montrent comme précédemment.
De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$, la même preuve que précédemment montre que P est nul sur $[a,b]$.
Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines donc $P = 0$, ce qui prouve le caractère défini du produit scalaire.

Proposition 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. Si y est nul, les deux membres de l'inégalité sont nuls donc l'inégalité (qui est même une égalité) est vérifiée.

Supposons donc que $y \neq 0$ et notons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle.$$

Par positivité du produit scalaire, $P(\lambda) \geq 0$ pour tout réel λ.

Par ailleurs, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$P(\lambda) = \lambda^2\langle y, y\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle.$$

C'est un trinôme du second degré (car $\langle y, y\rangle \neq 0$) de signe constant donc son discriminant est négatif, ce qui s'écrit

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0,$$

d'où

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Par croissance de la racine carrée, on obtient :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Montrons maintenant le cas d'égalité.

Supposons qu'il y ait égalité. Alors le discriminant du trinôme est nul, c'est à dire qu'il admet une racine double λ_0 tel que $\langle x + \lambda_0 y\rangle = 0$. Par définition du produit scalaire, ceci implique que $x + \lambda_0 y = 0$, donc les vecteurs x et y sont liés.

Réciproquement, supposons que les vecteurs x et y sont liés, i.e. il existe un $\lambda \neq 0$ tel que $x = \lambda y$ (ceci est possible car $y \neq 0$).

Alors

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda|\langle y, y\rangle$$

et

$$\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle \lambda y, \lambda y\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle y, y\rangle^2} = |\lambda|\langle y, y\rangle$$

en utilisant que $\langle y, y\rangle \geq 0$ par positivité du produit scalaire.

On a donc bien égalité si les vecteurs x et y sont liés. ■

Remarque 1. En pratique, on utilise fréquemment l'écriture équivalente :

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Exemple 2. • Pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit comme suit : pour tout couple $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont colinéaires.

• Pour le produit scalaire vu sur $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on a pour tout $(f, g) \in E^2$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)$$

avec égalité si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

25.1.2 Norme associée au produit scalaire

Définition 2: Norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit qu'une application

$$\begin{array}{rcl} \|.\| : E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

est une norme si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. (Séparation) Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
2. (Homégénéité) Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$.
3. (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Dans ce cas, on dit que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 2. La valeur absolue et le module sont des normes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement.

Proposition 2: Norme associée à un produit scalaire

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Alors E est un espace vectoriel normé pour la norme euclidienne $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ définie pour tout $x \in E$ par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Démonstration. Il faut vérifier que l'application $\|.\|$ vérifie les axiomes d'une norme.

1. (Séparation)
   Soit $x \in E$. On a
   $$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
   par définition d'un produit scalaire.
2. (Homogénéité)
   Soit $x \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on a
   $$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|.$$
3. (Inégalité triangulaire)
   Soit $(x, y) \in E^2$.
   On a
   $$\begin{array}{rcll} \|x+y\|^2 & = & \langle x+y, x+y\rangle & \\ & = & \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle & \text{(Bilinéarité et symétrie du produit scalaire)} \\ & \leq & \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 & \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ & \leq & (\|x\| + \|y\|)^2. & \end{array}$$
   Par croissance de la racine carrée, on a
   $$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

Remarque 3. On a utilisé la forme suivante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui coïncide avec la définition de la norme euclidienne : pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Exemple 3. Des produits scalaires canoniques énoncés en début de cours, on déduit des exemples « canoniques »de normes :

1. Sur $\mathbb{R}^n$, on a
   $$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
   $$\|A\| = (\mathrm{Tr}(A^T A))^{\frac{1}{2}}.$$
3. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on a
   $$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3: Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Soit $(x, y) \in E^2$.
Alors
$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x.$$

Démonstration. Si $y = 0$, il n'y a rien à montrer. On supposera donc dans toute la preuve que $y \neq 0$.

1. Supposons que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.
   En reprenant la démonstration de l'inégalité triangulaire, on voit que ceci équivaut à $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$. En particulier, il y a donc égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui implique que x et y sont liés.
   Puisque $y \neq 0$, il existe donc un réel λ tel que $x = \lambda y$.
   Ainsi,
   $$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow \lambda\langle y, y\rangle = |\lambda|\|y\|^2.$$
   Or, $y \neq 0$ et $\langle y, y\rangle = \|y\|^2 > 0$ donc on en déduit que $\lambda = |\lambda|$, ce qui implique que $\lambda \geq 0$.
2. Réciproquement, supposons qu'il existe un réel positif λ tel que $x = \lambda y$. (Le cas $y = \lambda x$) se traite de la même manière.
   Alors, on a
   $$\|x+y\| = \|(1+\lambda)y\| = |1+\lambda|\|y\| = (1+\lambda)\|y\|$$
   car $1 + \lambda \geq 0$ et
   $$\|x\| + \|y\| = \|\lambda y\| + \|y\| = |\lambda|\|y\| + \|y\| = (1+\lambda)\|y\|$$
   car $\lambda \geq 0$.

■

Définition 3: Distance

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
Soient $(x, y) \in E^2$. On appelle distance de x à y le réel positif
$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Remarque 4. Notons que, par homogénéité de la norme,
$$d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x-y)\| = |-1| \times \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Proposition 4: Identités de polarisation

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Soit $(x, y) \in E^2$. Alors
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Démonstration. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x^2\| + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

et
$$\|x-y\|^2 = \|x^2\| - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$
Ainsi,
$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$$
d'où la première formule.

Par ailleurs,
$$\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x, y\rangle,$$
ce qui prouve la première formule. ■

Remarque 5. (Identité du parallélogramme) On déduit également de la preuve précédente l'identité du parallélogramme, à savoir
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Géométriquement, cette égalité signifie que la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des quatres côtés de ce parallélogramme.

25.2 Orthogonalité

25.2.1 Famille orthogonale

Définition 4: Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.

1. Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.
2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^2$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, alors $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.
3. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^2$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthonormée si elle est orthogonale et si de plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|x_k\| = 1$.

Exemple 4. Soit p et q deux entiers naturels distincts. Alors les fonctions $x \mapsto \cos(px)$ et $x \mapsto \cos(qx)$ sont orthogonales dans $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit sclaire préalablement défini.

En effet, on a (en utilisant le fait que $p + q \neq 0$ et $p - q \neq 0$)
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x))dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right]_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposition 5

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une telle famille. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x_i \rangle.$$

Or, par orthogonalité de la famille, on a $\langle x_k, x_i \rangle = 0$ si $k \neq i$.

On obtient donc $\lambda_i \langle x_i, x_i \rangle = 0$. Or $\langle x_i, x_i \rangle > 0$ car $x_i \neq 0$. On en déduit que $\lambda_i = 0$.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$, ce qui implique que la famille est libre. ■

Remarque 6. A retenir : pour montrer qu'une famille de vecteurs non nuls dans un espace préhilbertien est libre, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale.

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, c_k la fonction $x \mapsto \cos(kx)$ définie sur $[0, 2\pi]$.

D'après l'exemple précédent, on en déduit que la famille $(c_0, \ldots, c_n)$ est libre dans $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Théorème 1: Théorème de Pythagore

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de E.
Alors

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots \|x_n\|^2.$$

Démonstration. Par bilinéarité du produit scalaire, on obtient

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \langle x_1 + \cdots + x_n, x_1 + \cdots + x_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle.$$

Or pour tout $i < j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ donc le résultat en découle. ■

25.2.2 Bases orthonormées

Théorème 2: Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E. On note $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.
Alors il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n.

Initialisation : Si $(e_1) \in E$ est une famille libre de E, alors nécessairement $e_1 \neq 0$. Posons $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Alors le vecteur ε_1 est normé et vérifie $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vérifiée pour l'entier naturel n. Prouvons-la au rang $n+1$.

Soit $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une famille libre de vecteurs de E. Alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est également une famille libre.

Par hypothèse de récurrence, on suppose construite une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

Cherchons tout d'abord à construire un vecteur ε'_{n+1} telle que la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon'_{n+1})$ est orthogonale et telle que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon'_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1})$.

Cherchons ε'_{n+1} sous la forme

$$\varepsilon'_{n+1} = e_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_k,$$

où les λ_k sont n réels.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon'_{n+1} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \varepsilon_i, e_{n+1} \rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle = 0.$$

Or, $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle = 1$ si $k = i$ et 0 sinon.

Ainsi, on en déduit $\langle \varepsilon_i, e_{n+1} \rangle + \lambda_i = 0$ d'où

$$\lambda_i = -\langle \varepsilon_i, e_{n+1} \rangle.$$

On a donc l'écriture

$$\varepsilon'_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle \varepsilon_k, e_{n+1} \rangle \varepsilon_k.$$

Notons que $\varepsilon'_{n+1} \neq 0$: en effet, si on avait $\varepsilon'_{n+1} = 0$, on aurait

$$e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \langle \varepsilon_k, e_{n+1} \rangle \varepsilon_k \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$$

par hypothèse de récurrence, ce qui contredit la liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_{n+1})$.

On vérifie alors aisément que la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon'_{n+1})$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, a fortiori elle est libre.

Donc $\dim(\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon'_{n+1})) = n + 1 = \dim(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1}))$.

D'autre part, on a par définition $\varepsilon'_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, e_{n+1})$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, à savoir que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, on en déduit que $\varepsilon'_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1})$ puis que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon'_{n+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1})$.

Par égalité des dimensions, on en conclut que

$$\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon'_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1}).$$

Ainsi, la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon'_{n+1})$ est bien une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1})$.

Il nous reste simplement à normer ε'_{n+1} en posant $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{\varepsilon'_{n+1}}{\|\varepsilon'_{n+1}\|}$.

La famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$ est maintenant orthonormée, donc est libre et est une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1})$, et on a bien pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

■

Remarque 7. Si la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est déjà orthonormée, l'algorithme ne fait rien et on obtient $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (e_1, \ldots, e_n)$.

Corollaire 1: Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien.
Alors E admet des bases orthonormées.

Démonstration. Il suffit de considérer une base de E et de l'orthonormer par l'algorithme de Gram-Schmidt. On obtient alors une base orthonormée de E. ■

Remarque 8. • La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

• Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de la base $(e_1, \dots, e_n)$ après avoir effectué l'algorithme de Gram-Schmidt.

Puisque pour tout $k \in [\![1, n]\!], \varepsilon_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ vers la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est triangulaire supérieure.

Exemple 6. On considère la base de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (1, 1, 1), e_3 = (-1, 1, 0).$$

Appliquons lui l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Tout d'abord, on pose $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.

Ensuite, on pose $\varepsilon_2' = e_2 - \langle \varepsilon_1, e_2 \rangle \varepsilon_1$.

On a $\langle \varepsilon_1, e_2 \rangle = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Ainsi,

$$\varepsilon_2' = (1, 1, 1) - (1, 0, 1) = (0, 1, 0).$$

On a déjà $\|\varepsilon_2'\| = 1$ donc on pose $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$.

Enfin, posons $\varepsilon_3' = e_3 - \langle \varepsilon_1, e_3 \rangle \varepsilon_1 - \langle \varepsilon_2, e_3 \rangle \varepsilon_2$.

On a $\langle \varepsilon_1, e_3 \rangle = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle \varepsilon_2, e_3 \rangle = 1$ d'où

$$\varepsilon_3' = (-1, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 1) - (0, 1, 0) = \frac{1}{2}(-1, 0, 1).$$

On pose $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon_3'}{\|\varepsilon_3'\|} = \sqrt{2}\varepsilon_3' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

On vérifie alors que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 2: Théorème de la base orthonormée incomplète

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée.
Alors il existe des vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ tels que la famille $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Démonstration. Il suffit de compléter la famille $(e_1, \dots, e_p)$ en une base de E puis d'appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (les p premiers vecteurs de cette base étant déjà orthonormés, ils ne seront pas modifiés par l'algorithme). ∎

Proposition 6: Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Alors tout vecteur x de E se décompose dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\langle x, e_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_k \rangle.$$

Or, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ étant orthonormée, on a $\langle e_i, e_k \rangle = 1$ si $i = k$, et 0 si $i \neq k$.

Ainsi, il vient

$$\langle x, e_k \rangle = \lambda_k,$$

et ce pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Finalement, on a donc bien

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

■

Exemple 7. Reprenons l'exemple précédent. Soit $x = (2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à calculer ses coordonnées dans la base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ obtenue.

On a $\langle x, \varepsilon_1 \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle x, \varepsilon_2 \rangle = 1$ et $\langle x, \varepsilon_3 \rangle = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

On obtient donc

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \varepsilon_3.$$

Proposition 7: Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices coordonnées des vecteurs x et y dans la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$.

Alors on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$$

et a fortiori

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (X^T X)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Or, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ étant orthonormée, on a $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ si $i = j$, 0 si $i \neq j$.

Ainsi, on a bien $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ qui est de façon immédiate égal à $X^T Y$.

Le résultat pour la norme s'obtient en posant $y = x$ et en calculant $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. ■

Remarque 9. Puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i = \langle x, e_i \rangle$ et $y_i = \langle y, e_i \rangle$, on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

et

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

25.2.3 Sous-espaces orthogonaux

Définition 5: Sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que les sous-espaces F et G sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, on a

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Proposition 8: Somme directe orthogonale

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient F et G des sous-espaces orthogonaux. Alors

$$F + G = F \oplus G.$$

On dit que c'est une somme directe orthogonale et on note $F + G = F \oplus^{\perp} G$.

Démonstration. Soit $x \in F \cap G$. Puisque F et G sont orthogonaux, alors $\langle \underbrace{x}_{\in F}, \underbrace{x}_{\in G} \rangle = 0$ donc $x = 0_E$.

Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$, ce qui prouve que la somme $F + G$ est directe. ■

Exemple 8. Les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$.

En effet, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T B) = \mathrm{Tr}(BA^T) = \mathrm{Tr}((BA^T)^T) = \mathrm{Tr}(AB^T) = -\mathrm{Tr}(AB) = -\mathrm{Tr}(A^T B) = -\langle A, B \rangle$$

donc $\langle A, B \rangle = 0$.

Puisque $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, on a la somme directe orthogonale

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Définition 6: Orthogonal d'une partie

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit X un sous-ensemble de E.
On appelle orthogonal de X l'ensemble

$$X^{\perp} = \{y \in E, \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Proposition 9

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit X un sous-ensemble de E.
Alors $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Montrons que $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- On a $0 \in X^{\perp}$: en effet, pour tout $x \in X$, $\langle x, 0 \rangle = 0$.
- Soient $(y, z) \in (X^{\perp})^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par bilinéarité du produit scalaire, on a pour tout $x \in X$,

$$\langle x, \lambda y + z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = 0$$

car $y \in X^\perp$ et $z \in X^\perp$. Donc $y + \lambda z \in X^\perp$.

On en déduit que $X^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E. ■

Remarque 10. Si X est un sous-espace vectoriel de E, alors $X^\perp$ et X sont des sous-espaces orthogonaux.

Exemple 9.

1. On a $\{0\}^\perp = E$. En effet, pour tout $x \in E$, on a $\langle x, 0\rangle = 0$ donc $E \subset \{0\}^\perp$ et l'autre inclusion est triviale.
2. $E^\perp = \{0\}$.
   Pour tout $x \in E$, on a $\langle 0, x\rangle = 0$ donc $0 \in E^\perp$.
   Réciproquement, soit $x \in E^\perp$. Alors pour tout $y \in E, \langle x, y\rangle = 0$. En particulier, pour $y = x$, on obtient $\langle x, x\rangle = 0$, d'où $x = 0$.
   Finalement, on a donc bien $E^\perp = \{0\}$.
3. On déduit de l'exemple précédent la propriété suivante : soient $(x, y) \in E^2$ tels que pour tout $z \in E, \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$.
   Alors $x = y$.
   En effet, on a pour tout $z \in E, \langle x - y, z\rangle = 0$ donc $x - y \in E^\perp = \{0\}$ d'où $x - y = 0$.

Remarque 11.

1. Puisque F et $F^\perp$ sont orthogonaux, la somme $F \oplus F^\perp$ est directe. En particulier, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$.
2. On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$.
   En effet, soit $x \in F$. Par définition, pour tout $y \in F^\perp, \langle x, y\rangle = 0$ donc $x \in (F^\perp)^\perp$.
   En revanche, on n'a pas toujours égalité.
   Considérons $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$; F est bien un sous-espace vectoriel de E.
   Soit $f \in F^\perp$. Alors la fonction $g : t \mapsto tf(t) \in F$ donc $\langle f, g\rangle = 0$, i.e.

$$\int_0^1 tf^2(t)dt = 0.$$

   Puisque la fonction $t \mapsto tf^2(t)$ est continue et positive sur $[0, 1]$, on en déduit qu'elle y est nulle. A fortiori, pour tout $t \in]0, 1], f^2(t) = 0$ puis $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, 1]$.
   Par continuité de f, on a alors $f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = 0$ donc f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.
   Ainsi, $F^\perp = \{0\}$ (et donc clairement $F \oplus F^\perp \neq E$) et $(F^\perp)^\perp = E$. Puisqu'on a clairement $F \neq E$, on a dans ce cas

$$F \neq (F^\perp)^\perp.$$

   On verra plus tard qu'il y a toujours égalité si F est de dimension finie.

Proposition 10

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de F. Soit $x \in E$. Alors on a l'équivalence

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \langle x, e_i\rangle = 0.$$

Démonstration. Supposons que $x \in F^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de F, en particulier à tous les e_i, pour $1 \leq i \leq n$.

Réciproquement, supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!], \langle x, e_i \rangle = 0$. Montrons que $x \in F^\perp$.
Soit $y \in F$.
Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de F, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

On a alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle = 0$$

car pour tout $i \in [\![1, n]\!], \langle x, e_i \rangle = 0$ par hypothèse.
On a donc bien $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F$, ce qui implique que $x \in F^\perp$. ■

Proposition 11: Unicité du supplémentaire orthogonal

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit F un sous-espace vectoriel de E.
On suppose que F admette un supplémentaire orthogonal, c'est à dire qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E orthogonal à F tel que

$$E = F \oplus^\perp G.$$

Alors $G = F^\perp$.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $(x, y) \in F \times G$, on a $\langle x, y \rangle = 0$ donc $G \subset F^\perp$.
Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $z \in F^\perp$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.
Puisque $z \in F^\perp$, on a $\langle x, z \rangle = 0$ d'où

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle = 0.$$

Or, $y \in G \subset F^\perp$ donc $\langle x, y \rangle = 0$. Ainsi, on a $\langle x, x \rangle = 0$, d'où $x = 0$.
Donc $z = y \in G$.
On a donc bien $F^\perp \subset G$ d'où $F^\perp = G$. ■

Remarque 12. • Ce résultat justifie qu'on parle du supplémentaire orthogonal de F, qui est donc unique s'il existe.
• Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $p \leqslant n$. Notons $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
Alors $E = F \oplus^\perp G$ donc $G = F^\perp$, i.e. $\text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n) = (\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p))^\perp$.

Proposition 12: Supplémentaire orthogonal en dimension finie

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors

1. $E = F \oplus^\perp F^\perp$;
2. $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

1. Puisque F est de dimension finie, considérons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F (où $n = \dim(F)$).

   Soit $x \in E$. Notons $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in F$.

Montrons que $z = x - y \in F^\perp$. Pour cela, on sait qu'il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!], \langle z, e_k \rangle = 0$ (puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de F).
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0,$$

en utilisant le fait que $\langle e_i, e_k \rangle = 1$ si $i = k$, 0 sinon.
On a donc pour tout $k \in [\![1, n]\!], \langle z, e_k \rangle = 0$ d'où $z \in F^\perp$.
Ainsi, tout x dans E s'écrit $x = y + z \in F + F^\perp$.
On a donc bien $E = F + F^\perp$ puis $E = F \oplus F^\perp$ car on a déjà vu que la somme était directe.

2. D'après le premier alinéa, $F^\perp$ admet un supplémentaire orthogonal qui est F.
D'après la proposition précédente, on sait que ce supplémentaire orthgonal ne peut être que $(F^\perp)^\perp$, donc $F = (F^\perp)^\perp$.

■

Remarque 13. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$, alors $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Corollaire 3: Dimension de l'orthogonal

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors
$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E).$$

Démonstration. En effet, puisque E est de dimension finie, F l'est également et d'après la proposition précédente, on a
$$E = F \oplus F^\perp.$$
Puisque E est de dimension finie, $F^\perp$ l'est également et on a donc bien

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E).$$

■

Remarque 14. Soit E un espace euclidien.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel G vérifie $G = F^\perp$, il suffit de montrer que F et G sont orthogonaux et que $\dim(F) + \dim(G) = F^\perp$.
En effet, dans ce cas on aura $E = F \oplus^\perp G$ et on sait que ceci implique que $G = F^\perp$.
2. Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E vérifie $F = E$, il suffit de montrer que $F^\perp = \{0\}$.
En particulier, pour montrer qu'une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice dans E, il suffit de montrer que $(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n))^\perp = \{0\}$.

25.2.4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 7: Projection orthogonale

Soit $(E\langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
On appelle projection orthogonale sur F, noté p_F, l'endomorphisme de E défini par la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 15. Ceci est justifié par le fait que sous ces hypothèses, on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

Ainsi, pour tout $x \in E, p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

Exemple 10. Reprenons la base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ donnée par

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

Notons $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Soit $x = (1,-3,2)$.
Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_F(x) = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 \in F$
D'autre part, on a $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ ce qui équivaut au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \langle x - p_F(x), \varepsilon_1 \rangle & = & 0 \\ \langle x - p_F(x), \varepsilon_2 \rangle & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \langle x, \varepsilon_1 \rangle & = & \langle p_F(x), \varepsilon_1 \rangle \\ \langle x, \varepsilon_2 \rangle & = & \langle p_F(x), \varepsilon_2 \rangle \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{3}{\sqrt{2}} & = & \lambda_1 \\ -3 & = & \lambda_2 \end{array} \right.$$

Ainsi, $p_F(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 = (\frac{3}{2}, -3, \frac{3}{2})$.

On vérifie que $x - p_F(x) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3 \in F^{\perp}$.

Proposition 13: Coordonnées du projeté orthogonal

Soit $(E\langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F.
Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Le vecteur $p_F(x)$ est alors appelé le projeté orthogonal de x sur F.

Démonstration. Soit $x \in E$. On a vu que $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in F$ et $z = x - y \in F^{\perp}$.

Donc x s'écrit $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$.

Puisque la somme $E = F \oplus F^{\perp}$ est directe, ceci est la seule décomposition possible de x donc $p_F(x) = y$, ce qui donne la formule attendue. ∎

Exemple 11. En pratique, cette formule permet de calculer facilement un projeté orthogonal (si on connaît une base orthonormée de l'espace sur lequel on veut projeter).

Reprenons l'exemple précédent. On avait donc directement

$$p_F(x) = \langle x, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle x, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 = (\frac{3}{2}, -3, \frac{3}{2}).$$

Proposition 14: Inégalité de Bessel

Soit $(E\langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Alors pour tout $x \in E$, on a

$$\|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

Démonstration. Soit $x \in E$.

Alors $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.
D'après le théorème de Pythagore, on a donc

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

Par croissance de la racine carrée, on obtient

$$\|x\| \geq \|p_F(x)\|.$$

■

25.2.5 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 8: Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Soit $x \in E$.
On appelle distance de x à F, et on note $d(x, F)$, le réel défini par

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Remarque 16. Cette borne inférieure est bien définie car pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{\|x - y\|, y \in F\}$ est un ensemble de réels positifs, donc il est minoré par 0.

Proposition 15

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Alors pour tout $x \in E$, on a

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que

$$\|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F).$$

Démonstration. Soit $x \in E$.
Puisque $p_F(x) \in F$, par définition, on a $d(x, F) \leq \|x - p_F(x)\|$.
Montrons l'autre inégalité.
Soit $y \in F$.
On a $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$ avec $(x - p_F(x)) \in F^\perp$ et $(p_F(x) - y) \in F$ (puisque $p_F(x) \in F, y \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E). D'après le théorème de Pythagore, il vient

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

Par croissance de la racine, on trouve

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|,$$

et ce pour tout $y \in F$. Ainsi, on a

$$\|x - p_F(x)\| \leq \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F),$$

d'où l'égalité

$$\|x - p_F(x)\| = d(x, F).$$

La borne inférieure est donc atteinte pour $y = p_F(x)$, c'est donc bien un minimum.

Supposons qu'il existe un autre vecteur $y \in F$ tel qu'on ait

$$\|x - y\| = d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

D'après le calcul fait précédemment, on a donc

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \Leftrightarrow \|p_F(x) - y\|^2 = 0,$$

c'est à dire $\|p_F(x) - y\| = 0$, d'où $p_F(x) - y = 0$ ou encore $y = p_F(x)$.

L'unique vecteur $y \in F$ pour lequel $\|x - y\| = d(x, F)$ est donc $y = p_F(x)$. ■

Corollaire 4

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F.
Alors pour tout $x \in E$, on a

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.$$

Démonstration. Soit $x \in E$.

D'après la proposition précédente, on a $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$. Puisque $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2,$$

d'où

$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2.$$

D'autre part, on sait qu'on a $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

D'après l'expression de la norme dans une base orthonormée, on a

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.$$

La formule en découle. ■

Exemple 12. Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Les polynômes $(P_0, P_1) = (1, 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}))$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Calculons la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

On a $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \langle X^2, P_0 \rangle P_0 + \langle X^2, P_1 \rangle P_1$ avec

$$\langle X^2, P_0 \rangle P_0 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

et

$$\langle X^2, P_1 \rangle = 2\sqrt{3} \int_0^1 t^3 - \frac{t^2}{2} dt = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ainsi, $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \dfrac{1}{3} + X - \dfrac{1}{2} = X - \dfrac{1}{6}$.

(On retrouve au passage que $X^2 - X + \dfrac{1}{6} \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$.)
D'autre part, on a
$$\|X^2\| = \left(\int_0^1 t^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$
D'après la proposition précédente, on a donc
$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2\|^2 - \langle X^2, P_0\rangle^2 - \langle X^2, P_1\rangle^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{180}$$
d'où
$$d(X, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$
(On retrouve $\|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}\| = \|X^2 - X + \frac{1}{6}\| = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}$.)

25.3 Formes linéaires sur un espace euclidien

25.3.1 Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire

Théorème 3

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.
Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on ait
$$f(x) = \langle a, x\rangle.$$

Démonstration. Nous allons donner deux démonstrations, la première conceptuelle, la deuxième constructive.

1. Considérons l'application
$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \varphi(a) = \varphi_a \end{array}$$
où φ_a est la forme linéaire définie sur E par
$$\varphi_a(x) = \langle a, x\rangle.$$
(C'est bien une forme linéaire par bilinéarité du produit scalaire).
Montrons que l'application φ est bijective.
Tout d'abord, montrons qu'elle est linéaire.
Soit $(a, b) \in E^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in E$, on a
$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\lambda a+b}(x) & = & \langle \lambda a + b, x\rangle \\ & = & \lambda\langle a, x\rangle + \langle b, x\rangle \\ & = & \lambda\varphi_a(x) + \varphi_b(x) \\ & = & (\lambda\varphi_a + \varphi_b)(x). \end{array}$$
Ainsi, $\varphi_{\lambda a+b} = \lambda\varphi_a + \varphi_b$ d'où
$$\varphi(\lambda a + b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(b),$$
ce qui assure la linéarité de φ.

Puisque $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = \dim(E)$, il suffit de montrer que φ est injective pour conclure à sa bijectivité.
Soit $a \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi_a = 0$ ce qui signife que pour tout $x \in E$, on a $\langle a, x\rangle = 0$.
Ainsi, $a \in E^{\perp} = \{0\}$ donc $a = 0$.
On a donc $\ker(\varphi) = \{0\}$, ce qui assure que φ est injective donc bijective.
On en conclut que pour toute forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f = \varphi_a$, i.e. tel que pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \langle a, x\rangle.$$

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $x \in E$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.
Il vient $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i)$.
D'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, on en déduit que

$$f(x) = \langle a, x\rangle$$

où $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i$, ce qui assure l'existence de a.
Prouvons maintenant l'unicité de a.
Soit $b \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) = \langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a déjà vu que ceci implique que $a = b$, d'où l'unicité de a.

■

Exemple 13. 1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. On sait que f est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
On pose $a = (a_1, \dots, a_n)$ et on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \langle a, x\rangle$.

2. On a vu en DM que pour toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existait une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

On a donc bien pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \langle A^T, M\rangle$.

Remarque 17. Soit E un espace euclidien. Soit H un hyperplan de E.
On sait qu'un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
Ainsi, il existe une forme linéaire f non nulle sur E telle que $H = \ker(f)$. (On sait que f n'est pas unique, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*, H = \ker(\lambda f)$.)
D'après la proposition précédente, il existe un unique $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $f(x) = \langle a, x\rangle$.
Ainsi, il existe $a \in E$ tel que $H = \{x \in E | \langle a, x\rangle = 0\}$.
(Encore une fois, a n'est pas unique puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda a, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$.)
L'équation $\langle a, x\rangle = 0$ fournit alors une équation de H.

Définition 9: Vecteur normal à un hyperplan

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit H un hyperplan de E.
On dit que $a \in E \backslash \{0\}$ est un vecteur normal à l'hyperplan H si

$$H = \{x \in E | \langle a, x \rangle = 0\}.$$

Remarque 18.

1. Dans ces conditions, on a $H^\perp = \mathbb{R}a = \mathrm{Vect}(a)$.
   En effet, on a $a \in H^\perp$ et $\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H) = 1$.
   L'ensemble des vecteurs normaux à H sont alors de la forme λa, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   Soit H un hyperplan de E et $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ un vecteur normal à H.
   Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   Alors
   $$x \in H \Leftrightarrow \langle a, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$
   On retrouve l'équation d'un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$.
   Sur $\mathbb{R}^2$, si on se donne un vecteur $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation
   $$ax + by = 0$$
   définit la droite D orthogonale à la droite passant par l'origine $(0, 0)$ et le point (a, b).
   Autrement dit, le vecteur (a, b) est un vecteur normal à la droite D.
   Sur $\mathbb{R}^3$, si on si on se donne un vecteur $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'équation
   $$ax + by + cz = 0$$
   définit le plan P orthogonal à la droite passant par l'origine $(0, 0, 0)$ et le point (a, b, c).
   Autrement dit, le vecteur (a, b, c) est un vecteur normal au plan P.

25.3.2 Distance d'un vecteur à un hyperplan ou à une droite

Proposition 16: Distance d'un vecteur à un hyperplan ou à une droite

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit H un hyperplan de E, soit a un vecteur normal à H.
   Alors pour tout $x \in E$, on a
   $$d(x, H) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}.$$
2. Soit D une droite vectorielle de E (i.e. un sous-espace vectoriel de E de dimension 1), soit $a \in D \backslash \{0\}$.
   Alors pour tout $x \in E$, on a
   $$d(x, D) = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{\langle a, x \rangle^2}{\|a\|^2}}.$$

Démonstration.

1. Soit $x \in E$.
   On a montré que $d(x, H) = \|x - p_H(x)\|$ où $p_H(x)$ est l'unique vecteur de H tel que $x - p_H(x) \in H^\perp = \mathbb{R}a$.
   Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x - p_H(x) = \lambda a$ d'où $p_H(x) = x - \lambda a$.
   D'autre part, puisque $p_H(x) \in H$ et que a est un vecteur normal à H, on a
   $$\langle a, p_H(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a, x\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = 0$$
   d'où $\lambda = \dfrac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2}$.
   Finalement, on a donc
   $$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \|\lambda a\| = |\lambda|\|a\| = \frac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|}.$$

2. Soit $x \in E$.
   Le vecteur $\dfrac{a}{\|a\|}$ est une base orthonormée de D donc
   $$d(x, D)^2 = \|x\|^2 - \|p_D(x)\|^2 = \|x\|^2 - \left\langle x, \frac{a}{\|a\|}\right\rangle^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle a, x\rangle^2}{\|a\|^2}.$$

■