Corrigé DS commun MPSI2-PCSI

Partie I — Résultats d'analyse utiles pour la suite

A. Étude de H_n

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$ donc

$$\boxed{\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.}$$

2. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt,$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}.}$$

3. En sommant ces inégalités, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

puis grâce à la relation de Chasles :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$.

Par ailleurs, via le changement d'indice $i = k+1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = H_{n+1} - 1$.

La question précédente donne donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n.}$$

5. La première inégalité est vraie d'après la question précédente. On sait en outre d'après la question précédente que pour tout $n \geqslant 1, H_{n+1} \leqslant 1 + \ln(n+1)$, i.e. pour tout $n \geqslant 2, H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

   Remarquons que pour $n = 1$, l'inégalité est encore vraie puisque $H_1 = 1 = 1 + \ln(1)$ donc on a bien $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Finalement,
$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

6. D'après la question précédente, on a pour tout $n > 1$ (puisque $\ln(n) > 0$) :
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1.$$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} + 1 = 1$.

   Par ailleurs, pour tout $n > 1$,
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}.$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc par composition de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, i.e. $\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).}$

7. D'après la question 5, on a pour tout $n \geqslant 1, H_n \leqslant 1 + \ln(n)$ d'où $H_n - \ln(n) \leqslant 1$.

   Par ailleurs, d'après la même question, pour tout $n \geqslant 1, H_n \geqslant \ln(n+1) \geqslant \ln(n)$ par croissance de $\ln$.

   On a donc bien
$$\boxed{\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant H_n - \ln(n) \leqslant 1.}$$

   Ceci implique que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ est bornée, i.e. $H_n - \ln(n) = O(1)$, d'où $\boxed{H_n = \ln(n) + O(1).}$

B. Une inégalité utile sur la fonction h

8. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$h'(x) = \ln(1+x) + (1+x) \times \frac{1}{1+x} - 1 = \ln(1+x)$$

   puis
$$h''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

9. • On a $\varphi(0) = h(0) - 0 = \ln(1) = 0$.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\varphi'(x) = h'(x) - \frac{1}{2}\frac{2x(1+\frac{x}{3}) - \frac{1}{3}x^2}{(1+\frac{x}{3})^2} = \ln(1+x) - \frac{\frac{x^2}{6}+x}{(1+\frac{x}{3})^2}$$

   et on trouve bien $\varphi'(0) = 0$.

10. On a pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{(1+\frac{x}{3})^3 - \frac{2}{3}(1+\frac{x}{3})(\frac{x^2}{6}+x)}{(1+\frac{x}{3})^4} \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{(1+\frac{x}{3})^2 - \frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x}{(1+\frac{x}{3})^3} \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+\frac{x}{3})^3} \\
&= \frac{(1+\frac{x}{3})^3 - (1+x)}{(1+x)(1+\frac{x}{3})^3} \\
&= \frac{\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{27}}{(1+x)(1+\frac{x}{3})^3}
\end{aligned}$$

   et on a bien $\boxed{\varphi''(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \geqslant 0.}$

11. On en déduit que φ' est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x \geqslant 0, \varphi'(x) \geqslant \varphi'(0)$.

   Or, d'après la question 9, $\varphi'(0) = 0$ donc $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0, \varphi'(x) \geqslant 0.}$

12. Ainsi, la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $\varphi(0) = 0$ d'après la question 9, on a $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ pour tout $x \geqslant 0$, i.e.

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0, h(x) \geqslant \frac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})}.}$$

Partie II — Loi du chat à l'instant n et étude de l'endomorphisme r

13. Soit $n \geqslant 1$. Notons A_n l'événement « le chat rechoisit un état entre le jour n et le jour $n+1$ ».

   Pour tout $(a, b) \in [\![1, 3]\!]$, d'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$ puis la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X_n=b)}(X_{n+1}=a) &= \frac{\mathbb{P}((X_{n+1}=a)\cap(X_n=b))}{\mathbb{P}(X_n=b)} \\
&= \frac{\mathbb{P}((X_{n+1}=a)\cap(X_n=b)\cap A_n)+\mathbb{P}((X_{n+1}=a)\cap(X_n=b)\cap\overline{A_n})}{\mathbb{P}(X_n=b)} \\
&= \mathbb{P}_{(X_n=b)}(A_n)\mathbb{P}_{(X_n=b)\cap A_n}(X_{n+1}=a)+\mathbb{P}_{(X_n=b)}(\overline{A_n})\mathbb{P}_{(X_n=b)\cap\overline{A_n}}(X_{n+1}=a) \\
&= \frac{1}{n+1}\mathbb{P}_{(X_n=b)\cap A_n}(X_{n+1}=a)+\frac{n}{n+1}\mathbb{P}_{(X_n=b)\cap\overline{A_n}}(X_{n+1}=a).
\end{aligned}$$

Notons que $\mathbb{P}_{(X_n=b)\cap\overline{A_n}}(X_{n+1}=a)=\delta_{a,b}$ (1 si $a=b$, 0 si $a\neq b$).

Par lecture d'énoncé, on obtient alors :

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{2n+1}{2(n+1)}; & \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{1}{2(n+1)}; & \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{1}{2(n+1)}; \\
\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\dfrac{1}{3(n+1)}; & \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=\dfrac{3n+1}{3(n+1)}; & \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=\dfrac{1}{3(n+1)}; \\
\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=\dfrac{1}{6(n+1)}; & \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=\dfrac{1}{6(n+1)}; & \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=\dfrac{6n+1}{6(n+1)}.
\end{array}$$

14. Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule des probabiblités totales dans le système complet d'événements $((X_n=1),(X_n=2),(X_n=3))$, on a

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\
&= \mathbb{P}(X_n=1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)+\mathbb{P}(X_n=2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) \\
&\quad +\mathbb{P}(X_n=3)\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1) \\
&= \frac{2n+1}{2(n+1)}x_n+\frac{1}{2(n+1)}y_n+\frac{1}{2(n+1)}z_n.
\end{aligned}$$

En raisonnant de même pour $\mathbb{P}(X_{n+1}=2)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1}=3)$, on a bien

$$y_{n+1}=\frac{1}{3(n+1)}\,x_n+\frac{3n+1}{3(n+1)}\,y_n+\frac{1}{3(n+1)}\,z_n$$

et

$$z_{n+1}=\frac{1}{6(n+1)}\,x_n+\frac{1}{6(n+1)}\,y_n+\frac{6n+1}{6(n+1)}\,z_n.$$

15. D'après la question précédente, on a pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ ù

$$\boxed{M_n=\begin{pmatrix} \frac{2n+1}{2(n+1)} & \frac{1}{2(n+1)} & \frac{1}{2(n+1)} \\ \frac{1}{3(n+1)} & \frac{3n+1}{3(n+1)} & \frac{1}{3(n+1)} \\ \frac{1}{6(n+1)} & \frac{1}{6(n+1)} & \frac{6n+1}{6(n+1)} \end{pmatrix}.}$$

16. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+1}I_3 + \frac{1}{n+1}R &= \frac{n}{n+1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{2n+1}{2(n+1)}&\frac{1}{2(n+1)}&\frac{1}{2(n+1)}\\\frac{1}{3(n+1)}&\frac{3n+1}{3(n+1)}&\frac{1}{3(n+1)}\\\frac{1}{6(n+1)}&\frac{1}{6(n+1)}&\frac{6n+1}{6(n+1)}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{M_n = \frac{n}{n+1}I_3 + \frac{1}{n+1}R.}$

Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Puisque $M_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g_n), R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(r)$ et $I_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, l'égalité précédente montre que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(\frac{n}{n+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{n+1}r\right)$$

d'où $\boxed{g_n = \frac{n}{n+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{n+1}r.}$

17. On a

$$R^2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix} = R,$$

d'où $r^2 = r$. Ainsi, r est un projecteur, ce qui permet d'affirmer que $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(r) \oplus \mathrm{Ker}(r)}$.

18. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(r) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z &=& 0\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z &=& 0\\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{6}y+\frac{1}{6}z &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x+y+z=0\\
&\Leftrightarrow z=-x-y\\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = x(1,0,-1)+y(0,1,-1)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))}$.

Par ailleurs, on sait que $\mathrm{Im}(R)$ est engendré par les colonnes de R donc $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}\right)$ donc (puisque R est la matrice de r dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) :

$\boxed{\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)\right).}$

19. D'après la question précédente, $u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(r)$ et $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (0, 1, -1)$ forment une base de $\mathrm{Ker}(r)$.

    Puisque $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(r) \oplus \mathrm{Ker}(r)$, on en déduit que $\boxed{B = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

20. Par propriété d'un projecteur, puisque $u_1 \in \mathrm{Im}(r)$, on a $r(u_1) = u_1$. De plus, puisque $(u_2, u_3) \in (\mathrm{Ker}(r))^2$, on a $r(u_2) = r(u_3) = 0$ donc la matrice de r dans la base B est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_B(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

21. Soit $n \geqslant 1$.

    D'après la question 16, on a

$$g_n(u_1) = \frac{n}{n+1} u_1 + \frac{1}{n+1} \underbrace{r(u_1)}_{=u_1} = u_1,$$

$$g_n(u_2) = \frac{n}{n+1} u_2 + \frac{1}{n+1} \underbrace{r(u_2)}_{=0} = \frac{n}{n+1} u_2$$

et

$$g_n(u_3) = \frac{n}{n+1} u_3 + \frac{1}{n+1} \underbrace{r(u_3)}_{=0} = \frac{n}{n+1} u_3$$

donc $\boxed{\mathrm{Mat}_B(g_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}.}$

22. Soit $n \geqslant 2$. En utilisant les résultats de la question précédente, on a

$$(g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1)(u_1) = u_1 = \frac{1}{n} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(u_1) + \frac{n-1}{n} \underbrace{r(u_1)}_{=u_1};$$

$$\begin{aligned} g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_2 \circ \underbrace{g_1(u_2)}_{=\frac{1}{2}u_2} &= \frac{1}{2} g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ \underbrace{g_2(u_2)}_{=\frac{2}{3}u_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_3(u_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} u_2 \\ &= \frac{1}{n} u_2 \\ &= \frac{1}{n} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(u_2) + \frac{n-1}{n} \underbrace{r(u_2)}_{=0}. \end{aligned}$$

On trouve de même que $g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1(u_3) = \frac{1}{n} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(u_3) + \frac{n-1}{n} r(u_3)$.

Ainsi, les endomorphismes $g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1$ et $\dfrac{1}{n}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{n-1}{n}r$ coÃ¯ncident sur la base B, donc on a $g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1 = \dfrac{1}{n}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{n-1}{n}r$ d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{n-1}{n}r\right)$$

, i.e.

$$\boxed{M_{n-1}M_{n-2}\dots M_2M_1 = \frac{1}{n}I_3 + \frac{n-1}{n}R.}$$

23. Soit $n \geqslant 1$.
   - Si $n = 1$, l'égalité à prouver est triviale.
   - Supposons que $n \geqslant 2$. D'après les questions 15 et 22, on a

$$\begin{aligned} V_n &= M_{n-1}V_{n-1} \\ &= M_{n-1}M_{n-2}V_{n-2} \\ &= M_{n-1}M_{n-2}\dots M_2M_1V_1 \\ &= \left(\frac{1}{n}I_3 + \frac{n-1}{n}R\right)V_1 \\ &= \frac{1}{n}V_1 + \frac{n-1}{n}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n}V_1 + \frac{n-1}{n}(x_1+y_1+z_1)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque $x_1 + y_1 + z_1 = 1$, on en conclut que

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \geqslant 1, V_n = \frac{1}{n}V_1 + \frac{n-1}{n}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}. \end{pmatrix}}\,.$$

24. Soit $n \geqslant 1$. La question précédente s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \frac{n-1}{n}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

En identifiant les premières lignes de ces matrices colonnes, on a

$$\boxed{x_n = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{x_1 - \frac{1}{2}}{n}.}$$

Partie III — Nombre total de jours passés dans l'état 1

25. Z_n compte le nombre de $k \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels $Y_k = 1$. Autrement dit, Z_n compte le nombre de jours entre le jour 1 et le jour n que le chat a passé dans l'état 1.

26. Soit $n \geqslant 1$. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k).$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X_k=1)}) = \mathbb{P}(X_k = 1) = x_k$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k.}$$

27. Soit $n \geqslant 1$. D'après la question 24, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $x_k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_1 - \frac{1}{2}}{k}$ donc, d'après la question précédente,

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1 - \frac{1}{2}}{k} \right) = \frac{n}{2} + \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

i.e. $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{2} + \left(x_1 - \dfrac{1}{2} \right) H_n.}$

28. D'après la question 6, $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $\dfrac{H_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{n} = 0$.

D'après la question précédente, on a alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\frac{n}{2}} = \lim_{n \to +\infty} 1 + 2 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \frac{H_n}{n} = 1$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}.}$

29. D'après la question 27, on a pour tout $n \geqslant 1, \mathbb{E}(Z_n) - \dfrac{n}{2} = \left(x_1 - \dfrac{1}{2} \right) H_n$.

Or, d'après la question 6, $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $H_n = O(\ln(n))$.

Ainsi, on a $\left(x_1 - \dfrac{1}{2} \right) H_n = O(\ln(n))$, d'où

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{2} = O(\ln(n)).}$$

Partie IV — Corrélations et variance

30. Soit $i \geqslant 1$. Montrons par récurrence sur j que pour tout $j \geqslant i + 1$, on a

$$\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_j = 1) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2j}.$$

• **Initialisation :** Pour $j=i+1$, d'après le calcul fait en question 13, on a

$$\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_j=1)=\frac{2i+1}{2(i+1)}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2(i+1)},$$

ce qui prouve la propriété au rang $j=i+1$.

• **Hérédité :** Soit $j\geqslant i+1$ fixé. Supposons que $\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_j=1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2j}$ et montrons que $\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{j+1}=1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2(j+1)}$.

Pour cela, utilisons la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $((X_j=1),\overline{(X_j=1)})$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{(X_i=1)}$: on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{j+1}=1) &= \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_j=1)\mathbb{P}_{(X_i=1)\cap(X_j=1)}(X_{j+1}=1)\\ &\quad+\mathbb{P}_{(X_i=1)}(\overline{X_j=1})\mathbb{P}_{(X_i=1)\cap(\overline{X_j=1})}(X_{j+1}=1)\\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2j}\right)\times\frac{2j+1}{2(j+1)}+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{i}{2j}\right)\times\frac{1}{j+1}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{2j+1}{4(j+1)}+\frac{i(2j+1)}{4j(j+1)}+\frac{1}{4(j+1)}-\frac{i}{4j(j+1)}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{i}{2(j+1)},\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $j+1$ et achève la récurrence.

31. A la lecture de l'énoncé, il est clair que $\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_j=1)=\mathbb{P}_{(X_i=3)}(X_j=1)$.

Montrons par récurrence sur j que pour tout $j\geqslant i+1$, on a

$$\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_j=1)=\frac{1}{2}-\frac{i}{2j}.$$

•**Initialisation :** Pour $j=i+1$, d'après le calcul fait en question 13, on a

$$\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_j=1)=\frac{1}{2(i+1)}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2(i+1)},$$

ce qui prouve la propriété au rang $j=i+1$.

• **Hérédité :** Soit $j\geqslant i+1$ fixé. Supposons que $\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_j=1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2j}$ et montrons que $\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_{j+1}=1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2(j+1)}$.

Pour cela, utilisons la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $((X_j=1),\overline{(X_j=1)})$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{(X_i=2)}$: on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_{j+1}=1) &= \mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_j=1)\mathbb{P}_{(X_i=2)\cap(X_j=1)}(X_{j+1}=1)\\ &\quad+\mathbb{P}_{(X_i=2)}(\overline{X_j=1})\mathbb{P}_{(X_i=2)\cap(\overline{X_j=1})}(X_{j+1}=1)\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2j}\right)\times\frac{2j+1}{2(j+1)}+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{i}{2j}\right)\times\frac{1}{j+1}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{2j+1}{4(j+1)}-\frac{i(2j+1)}{4j(j+1)}+\frac{1}{4(j+1)}+\frac{i}{4j(j+1)}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{i}{2(j+1)},\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $j+1$ et achève la récurrence.

On montre de même que $\mathbb{P}_{(X_i=3)}(X_j=1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2j}$.

32. On a

$$\mathbb{E}(Y_iY_j)=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X_i=1)}\mathbb{1}_{(X_j=1)})=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X_i=1)\cap(X_j=1)})=\mathbb{P}((X_i=1)\cap(X_j=1)).$$

Or, $\mathbb{P}((X_i=1)\cap(X_j=1))=\mathbb{P}(X_i=1)\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_j=1)=x_i(\frac{1}{2}+\frac{i}{2j})$ en utilisant le résultat de la question 30 donc $\boxed{\mathbb{E}(Y_iY_j)=x_i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2j}\right).}$

33. D'après la formule de KÃ¶nig-Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\mathbb{E}(Y_iY_j)-\mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j)=x_i\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2j}\right)-x_ix_j=x_i\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2j}-x_j\right).$$

Or, grâce à la question 24, on a

$$\frac{1}{2}+\frac{i}{2j}-x_j=\frac{i}{2j}+\frac{\frac{1}{2}-x_1}{j}=\frac{i}{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}-x_1}{i}\right)=\frac{i}{j}(1-x_i)$$

donc $\boxed{\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\dfrac{i}{j}x_i(1-x_i).}$

34. Soit $n\geqslant 1$. On a $Z_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Y_k$ donc

$$\mathrm{Var}(Z_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}x_i(1-x_i)$$

en utilisant le résultat de la question précédente.

De plus, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_k=1)=x_k$ donc $\mathrm{Var}(Y_k)=x_k(1-x_k)$.

On obtient donc bien $\boxed{\mathrm{Var}(Z_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k(1-x_k)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{i}{j}\,x_i(1-x_i).}$

35. Soit $n\geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1}i\\ &= \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{(j-1)j}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}j\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{(n-1)n}{2}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}=\frac{n(n-1)}{4}.}$

36. Pour tout $x\in[0,1]$, on a $0\leqslant x(1-x)=-x^2+x=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$.
D'après les deux questions précédentes, on a alors pour tout $n\geqslant 1$:
$$\operatorname{Var}(Z_n)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}\times\frac{1}{4}\leqslant\frac{n}{4}+\frac{n(n-1)}{8}$$
d'où $\boxed{\operatorname{Var}(Z_n)\leqslant\dfrac{n^2+n}{8}.}$

37. Pour tout $n\geqslant 1$, on a $n\leqslant n^2$ donc $n^2+n\leqslant 2n^2$ et le résultat de la question précédente permet d'établir que $\boxed{\operatorname{Var}(Z_n)\leqslant\dfrac{n^2}{4}.}$

38. D'après la question 24, on a pour tout $n\geqslant 1$:
$$x_n(1-x_n)=\left(\frac{1}{2}+\frac{x_1-\frac{1}{2}}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{x_1-\frac{1}{2}}{n}\right)=\frac{1}{4}-\frac{(x_1-\frac{1}{2})^2}{n^2}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\frac{1}{4}.$$
En particulier, il existe $n_0\geqslant 1$ tel que pour tout $n\geqslant n_0, x_n(1-x_n)\geqslant\dfrac{1}{8}$.
D'après la question 34, pour tout $n\geqslant n_0$, on a
$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(Z_n) &\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}x_i(1-x_i)\\
&\geqslant 2\sum_{n_0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}\underbrace{x_i(1-x_i)}_{\geqslant\frac{1}{8}}\\
&\geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=n_0+1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=n_0}^{j-1}i\\
&\geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=n_0+1}^{n}\underbrace{\frac{1}{j}}_{\geqslant\frac{1}{n}}\times\frac{(n_0+j-1)(j-n_0)}{2}\\
&\geqslant \frac{1}{8n}\sum_{j=n_0+1}^{n}(n_0+j-1)(j-n_0)\\
&\geqslant \frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{n-n_0}k\underbrace{(k+2n_0-1)}_{\geqslant k}\quad(k=j-n_0)\\
&\geqslant \frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{n-n_0}k^2\\
&\geqslant \underbrace{\frac{1}{8n}\frac{(n-n_0)(n-n_0+1)(2(n-n_0)+1)}{6}}_{:=u_n}.
\end{aligned}$$

On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{24}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2} = \frac{1}{24}$. Ainsi, pour un n assez grand, $\dfrac{u_n}{n^2} \geqslant \dfrac{1}{48}$.

Or, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} \geqslant \dfrac{u_n}{n^2}$. Quitte à prendre un n_0 plus grand, on peut donc supposer que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} \geqslant \dfrac{1}{48}$, i.e.

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant n_0, \mathrm{Var}(Z_n) \geqslant cn^2 \text{ avec } c = \frac{1}{48} > 0.}$$

39. D'après les deux questions précédentes, on a pour tout $n \geqslant n_0$,

$$cn^2 \leqslant \mathrm{Var}(Z_n) \leqslant C_2 n^2$$

d'où pour tout $n \geqslant n_0, c \leqslant \dfrac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} \leqslant C_2$, ce qui signifie que la suite $\left(\frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée, i.e. $\boxed{\mathrm{Var}(Z_n) = O(n^2).}$

De même, pour tout $n \geqslant n_0, \mathrm{Var}(Z_n) > 0$ car la variable aléatoire Z_n n'est pas constante et puisque $c > 0$ et $C_2 > 0$, on a pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{C_2} \leqslant \dfrac{n^2}{\mathrm{Var}(Z_n)} \leqslant \dfrac{1}{c}$ et on conclut de même que $\boxed{n^2 = O(\mathrm{Var}(Z_n)).}$

Partie V — Rafraîchissements et changements d'état effectifs

40. Soit $k \geqslant 1$. Pour tout $(a, b) \in [\![1, 3]\!]^2$, on a, d'après la construction de X_{k+1} à partir de X_k,

$$\mathbb{P}_{(X_k=b)}(X_{k+1} = a) = \mathbb{P}(B_k = 0)\delta_{a,b} + \mathbb{P}(B_k = 1)\mathbb{P}(U_k = a),$$

où $\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$ et 0 sinon.

Comme $\mathbb{P}(B_k = 0) = \dfrac{k}{k+1}$, $\mathbb{P}(B_k = 1) = \dfrac{1}{k+1}$ et

$$\mathbb{P}(U_k = 1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(U_k = 2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(U_k = 3) = \frac{1}{6},$$

on retrouve exactement les neuf probabilités conditionnelles de la question 13. Ainsi, la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ construite à partir de $(B_k)_{k\geqslant 1}$ et $(U_k)_{k\geqslant 1}$ suit bien le même mécanisme de transition que celui de l'énoncé.

41. Soit $k \geqslant 1$. La variable aléatoire Δ_k vaut 1 si le chat a changé d'état entre le k-ème jour et le $(k+1)$-ème jour, 0 s'il a conservé le même état.

• Si $B_k = 0$, alors $X_{k+1} = X_k$ par définition donc $\Delta_k = 0$ et dans ce cas, on a bien $\Delta_k \leqslant B_k$.

• Si $B_k = 1$, on a nécessairement $\Delta_k \leqslant B_k = 1$ puisque Δ_k ne prend que 0 et 1 comme valeur.

Ainsi, on a bien $\boxed{\Delta_k \leqslant B_k.}$

42. La variable aléatoire C_n compte le nombre de changements d'état effectifs du chat entre le jour 1 et le jour n.

43. Soit $n \geqslant 2$. On sait d'après la question 41 que pour tout $k \geqslant 1, \Delta_k \leqslant B_k$ donc

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} B_k = N_n.$$

44. Soit $n \geqslant 2$. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(N_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(B_k)$.

Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}(B_k) = 1 \times \mathbb{P}(B_k = 1) + 0 \times \mathbb{P}(B_k = 0) = \dfrac{1}{k+1}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(N_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.}$

Or, avec le changement d'indice $i = k+1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = H_n - 1$ donc $\boxed{\mathbb{E}(N_n) = H_n - 1.}$

Partie VI — Fonction génératrice exponentielle de N_n

45. Soit $k \geqslant 1$. D'après la formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}(e^{\lambda B_k}) = e^{\lambda \times 0}\mathbb{P}(B_k = 0) + e^{\lambda \times 1}\mathbb{P}(B_k = 1) = \frac{k}{k+1} + \frac{e^\lambda}{k+1}$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(e^{\lambda B_k}) = 1 + \dfrac{e^\lambda - 1}{k+1}.}$

46. Soit $n \geqslant 2$. On a $e^{\lambda N_n} = e^{\lambda \sum_{k=1}^{n-1} B_k} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} e^{\lambda B_k}$.

Puisque les variables aléatoires $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ sont indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $(e^{\lambda B_1}, \ldots, e^{\lambda B_{n-1}})$. Par propriété de l'espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(e^{\lambda N_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{\lambda B_k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(e^{\lambda B_k})$$

et d'après la question précédente, on en conclut que $\boxed{\mathbb{E}(e^{\lambda N_n}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{e^\lambda - 1}{k+1}\right).}$

47. Par convexité de la fonction exponentielle, sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes. Or, la droite définie par $u \mapsto 1 + u$ est la tangente en 0 de la courbe de la fonction exponentielle donc on a bien $1 + u \leqslant e^u$ pour tout réel u.

48. Soit $\lambda \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$.

En utilisant les deux questions précédentes, on a

$$\mathbb{E}(e^{\lambda N_n}) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{e^\lambda - 1}{k+1}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n-1}\exp\left(\frac{e^\lambda - 1}{k+1}\right) = \exp\left((e^\lambda - 1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right).$$

Or, on a vu en question 44 que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = H_n - 1$ donc on a bien $\boxed{\mathbb{E}(e^{\lambda N_n}) \leqslant \exp((e^\lambda - 1)(H_n - 1)).}$

49. **a)** Soient $\lambda > 0$ et $u \geqslant 0$. Par croissance stricte de la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$, on a

$\{N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n)+u\} = \{\omega \in \Omega,\ N_n(\omega) \geqslant \mathbb{E}(N_n)+u\} = \{\omega \in \Omega,\ e^{\lambda N_n(\omega)} \geqslant e^{\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}\}$

donc on a bien

$$\boxed{\{N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\} = \left\{e^{\lambda N_n} \geqslant e^{\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}\right\}.}$$

b) D'après la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda N_n} \geqslant e^{\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}\right).$$

Puisque la variable aléatoire $e^{\lambda N_n}$ est positive et que $e^{\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)} > 0$, on peut appliquer l'inégalité de Markov et on obtient

$$\mathbb{P}\left(e^{\lambda N_n} \geqslant e^{\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda N_n})}{e^{\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}},$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{P}\left(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\right) \leqslant e^{-\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}\mathbb{E}(e^{\lambda N_n}).}$$

c) D'après la question 44, on a $\mathbb{E}(N_n) = H_n - 1$ et d'après la question 48, $\mathbb{E}(e^{\lambda N_n}) \leqslant \exp((e^\lambda - 1)(H_n - 1))$. En reprenant l'inégalité obtenue en question précédente, on a alors

$$\mathbb{P}\left(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\right) \leqslant \exp\left(-\lambda(H_n - 1 + u)\right)\exp((e^\lambda - 1)(H_n - 1))$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}\left(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\right) \leqslant \exp\left((e^\lambda - 1 - \lambda)(H_n - 1) - \lambda u\right).}$

50. Soit $n \geqslant 2$ et soit $u \geqslant 0$.

Si $u = 0$, le membre de droite vaut 1, donc l'inégalité est triviale.

Supposons désormais $u > 0$. Comme $H_n > 1$, le réel

$$\lambda = \ln\left(1 + \frac{u}{H_n - 1}\right)$$

est bien défini et strictement positif. On a alors

$$\begin{aligned}
(e^\lambda - 1 - \lambda)(H_n - 1) - \lambda u &= \left(\frac{u}{H_n - 1} - \ln\left(1 + \frac{u}{H_n - 1}\right)\right)(H_n - 1) - u\ln\left(1 + \frac{u}{H_n - 1}\right) \\
&= -(H_n - 1)\left(\left(1 + \frac{u}{H_n - 1}\right)\ln\left(1 + \frac{u}{H_n - 1}\right) - \frac{u}{H_n - 1}\right) \\
&= -(H_n - 1)h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right).
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\right) \leqslant \exp\left(-(H_n - 1)h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right)\right).}$$

51. D'après la question 43, pour tout $n \geqslant 2, C_n \leqslant N_n$ donc $(C_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u) \subset (N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u)$: en effet, si $C_n(\omega) \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u$, alors $N_n(\omega) \geqslant C_n(\omega) \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u$.

   On en déduit que $\mathbb{P}\left(C_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\right) \leqslant \mathbb{P}\left(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\right)$ et d'après la question précédente, on en conclut que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(C_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\right) \leqslant \exp\left(-(H_n - 1)h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right)\right).}$$

Partie VII — Une forme plus simple et interprétation

52. D'après la question 5, on a bien pour tout $n \geqslant 2, H_n - 1 \leqslant \ln(n)$.

53. Soit $n \geqslant 2$, soit $u \geqslant 0$. On sait d'après la question 44 que $\mathbb{E}(N_n) = H_n - 1 \leqslant \ln(n)$ donc $\mathbb{E}(N_n) + u \leqslant \ln(n) + u$.

   Ainsi, si $C_n \geqslant \ln(n) + u$, alors $C_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u$ donc $\{C_n \geqslant \ln(n) + u\} \subset \{C_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\}$ et on en déduit que

$$\mathbb{P}(C_n \geqslant \ln(n) + u) \leqslant \mathbb{P}(C_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u) \leqslant \exp\left(-(H_n - 1)h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right)\right).$$

   D'après la question 12, puisque $\dfrac{u}{H_n - 1} \geqslant 0$, on a

$$h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right) \geqslant \frac{\frac{u^2}{(H_n-1)^2}}{2(1 + \frac{u}{3(H_n-1)})} = \frac{u^2}{2((H_n - 1)^2 + \frac{u}{3}(H_n - 1))}$$

   donc

$$(H_n - 1)h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right) \geqslant \frac{u^2}{2((H_n - 1) + \frac{u}{3})} \geqslant \frac{u^2}{2(\ln(n) + \frac{u}{3})}$$

   d'où, par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$,

$$\exp\left(-(H_n - 1)h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{u^2}{2(\ln(n) + \frac{u}{3})}\right)$$

   et on obtient bien

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n \geqslant \ln(n) + u) \leqslant \exp\left(-\frac{u^2}{2(\ln(n) + \frac{u}{3})}\right).}$$

54. Le nombre de changements effectifs C_n est contrôlé par N_n, dont l'espérance vaut $H_n - 1 \sim \ln(n)$. La dernière inégalité montre que les dépassements de $\ln(n)$ de taille u sont exponentiellement pénalisés :

$$\mathbb{P}(C_n \geqslant \ln(n) + u) \leqslant \exp\left(-\frac{u^2}{2(\ln(n) + \frac{u}{3})}\right).$$

   Ainsi, C_n est typiquement de l'ordre de $\ln(n)$, et les grands dépassements au-dessus de ce seuil deviennent rapidement improbables.