MPSI2-PCSI
P. Connault - A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques
Lundi 11 mai 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué d'un problème divisé en 7 parties et comporte 8 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Déviations félines : chat de Markov, algèbre ronronnante et un poil d'analyse

Problème guidé

On observe, jour après jour, l'activité dominante d'un chat dans son appartement. Chaque journée est classée dans l'un des trois états suivants :

— **état 1** : le chat a surtout dormi ;

— **état 2** : le chat a surtout somnolé, par exemple sur une chaise ou au bord d'une fenêtre, avec un œil à moitié ouvert ;

— **état 3** : le chat a surtout été actif, en circulant dans l'appartement, en explorant, en grimpant, ou en renversant un objet avec conviction.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n l'état du chat au jour n. Ainsi, au jour n, $X_n = 1$ (resp. $X_n = 2, X_n = 3$) signifie que le chat est dans l'état 1 (resp. $2, 3$).

On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 1$, sachant l'état du chat au jour n, son état au jour $n+1$ est déterminé de la manière suivante :

— avec la probabilité $\dfrac{n}{n+1}$, il conserve le même état ;

— avec la probabilité $\dfrac{1}{n+1}$, il rechoisit un état (qui peut être le même qu'au jour précédent) :

  — l'état 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$,

  — l'état 2 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$,

  — l'état 3 avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$.

On suppose de plus que la loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = x_1, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 2) = y_1, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 3) = z_1,$$

où x_1, y_1 et z_1 sont trois réels positifs tels que

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$x_n = \mathbb{P}(X_n = 1), \qquad y_n = \mathbb{P}(X_n = 2), \qquad z_n = \mathbb{P}(X_n = 3),$$

et

$$V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Objectif du problème. Le but est d'étudier successivement la loi de X_n, le nombre total de jours passés dans l'état 1, les corrélations associées, puis le nombre de changements d'état effectifs du chat.

Partie I — Résultats d'analyse utiles pour la suite

Les résultats de cette partie préliminaire seront utilisés plus loin pour estimer $\mathbb{E}(Z_n)$, puis pour simplifier une borne exponentielle sur le nombre de changements d'état.

Dans toute cette partie, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

A. Étude de H_n

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

3. En sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n.$$

5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

6. En déduire que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

7. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$0 \leq H_n - \ln(n) \leq 1.$$

En déduire que

$$H_n = \ln(n) + O(1).$$

B. Une inégalité utile sur la fonction h

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$h(x) = (1+x)\ln(1+x) - x.$$

8. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, puis calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.

9. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(x) = h(x) - \frac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})}.$$

Montrer que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

10. Calculer $\varphi''(x)$ pour tout $x \geqslant 0$, puis montrer que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\varphi''(x) \geqslant 0.$$

11. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\varphi'(x) \geqslant 0.$$

12. En déduire finalement que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$h(x) \geqslant \frac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})}.$$

Partie II — Loi du chat à l'instant n et étude de l'endomorphisme r

13. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, les neuf probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{(X_n=b)}(X_{n+1}=a), \qquad 1 \leq a,b \leq 3.$$

14. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2(n+1)}\, x_n + \dfrac{1}{2(n+1)}\, y_n + \dfrac{1}{2(n+1)}\, z_n, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3(n+1)}\, x_n + \dfrac{3n+1}{3(n+1)}\, y_n + \dfrac{1}{3(n+1)}\, z_n, \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{6(n+1)}\, x_n + \dfrac{1}{6(n+1)}\, y_n + \dfrac{6n+1}{6(n+1)}\, z_n. \end{cases}$$

15. En déduire qu'il existe, pour tout entier $n \geqslant 1$, une matrice $M_n \in M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$V_{n+1} = M_n V_n.$$

Écrire explicitement la matrice M_n.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note g_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_n.

16. On pose

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

et on note r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à R.
Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$M_n = \frac{n}{n+1} I_3 + \frac{1}{n+1} R.$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$

$$g_n = \frac{n}{n+1} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{n+1} r.$$

17. Montrer que

$$R^2 = R$$

et en déduire que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(r) \oplus \mathrm{Ker}(r).$$

18. Déterminer $\mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$.

19. Donner une base $B = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$u_1 \in \mathrm{Im}(r), \qquad u_2, u_3 \in \mathrm{Ker}(r).$$

20. Déterminer la matrice de r dans la base B.

21. Calculer $g_n(u_1), g_n(u_2), g_n(u_3)$ pour tout $n \geqslant 1$ et en déduire la matrice de g_n dans la base B.

22. Soit $n \geqslant 2$.
Calculer les images des vecteurs de la base B par l'endomorphisme $g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1$.
En déduire que

$$M_{n-1}M_{n-2}\dots M_2M_1 = \frac{1}{n}I_3 + \frac{n-1}{n}R.$$

23. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$V_n = \frac{1}{n}V_1 + \frac{n-1}{n}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

24. Montrer en particulier que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_1 - \frac{1}{2}}{n}.$$

Partie III — Nombre total de jours passés dans l'état 1

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$Y_k = \mathbb{1}_{(X_k=1)}.$$

Ainsi, la variable aléatoire Y_k vaut 1 si, au jour k, le chat est dans l'état 1, et 0 sinon.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

25. Interpréter Z_n en français courant.

26. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

27. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{n}{2} + \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) H_n.$$

28. En déduire que

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.$$

29. Montrer que

$$\mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{2} = O(\ln(n)).$$

Partie IV — Corrélations et variance

On fixe dans les questions 30 à 33 incluses deux entiers i et j tels que $1 \leq i < j$.

30. Montrer que

$$\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_j = 1) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2j}.$$

31. Montrer que, si $s \in \{2, 3\}$,

$$\mathbb{P}_{(X_i=s)}(X_j = 1) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2j}.$$

32. Montrer que
$$\mathbb{E}(Y_iY_j) = x_i\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2j}\right).$$

33. En déduire que
$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \frac{i}{j}\, x_i(1-x_i).$$

34. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:
$$\operatorname{Var}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k(1-x_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}\, x_i(1-x_i).$$

35. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:
$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

36. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\operatorname{Var}(Z_n) \leq \frac{n^2+n}{8}.$$

37. En déduire qu'on peut choisir
$$C_2 = \frac{1}{4}$$
dans la majoration
$$\operatorname{Var}(Z_n) \leq C_2 n^2.$$

38. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier n_0 tels que, pour tout entier $n \geqslant n_0$,
$$\operatorname{Var}(Z_n) \geqslant cn^2.$$

On pourra utiliser la question 24 pour montrer que, pour i assez grand, $x_i(1-x_i)$ est minoré par une constante strictement positive.

39. En déduire que
$$\operatorname{Var}(Z_n) = O(n^2) \qquad \text{et} \qquad n^2 = O\big(\operatorname{Var}(Z_n)\big).$$

Partie V — Rafraîchissements et changements d'état effectifs

Dans toute cette partie, on se donne :

— une suite $(B_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(B_k = 1) = \frac{1}{k+1}, \qquad \mathbb{P}(B_k = 0) = \frac{k}{k+1},$$

— une suite $(U_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, indépendantes des B_k, telles que, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(U_k = 1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(U_k = 2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(U_k = 3) = \frac{1}{6}.$$

On suppose que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k & \text{si } B_k = 0, \\ U_k & \text{si } B_k = 1. \end{cases}$$

40. Vérifier que cette construction redonne bien les probabilités de transition du début du problème.

41. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$\Delta_k = \mathbf{1}_{\{X_{k+1} \neq X_k\}}.$$

Interpréter Δ_k, puis montrer que

$$\Delta_k \leq B_k.$$

42. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k.$$

Interpréter C_n en français courant.

43. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$N_n = \sum_{k=1}^{n-1} B_k.$$

Montrer que

$$C_n \leq N_n.$$

44. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n - 1.$$

Partie VI — Fonction génératrice exponentielle de N_n

Dans toute la suite, λ désigne un réel strictement positif.

45. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\Big(e^{\lambda B_k}\Big) = 1 + \frac{e^{\lambda} - 1}{k+1}.$$

46. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}\Big(e^{\lambda N_n}\Big) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{e^{\lambda} - 1}{k+1}\right).$$

47. Montrer que, pour tout réel u,

$$1 + u \leq e^{u}.$$

48. En déduire que, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{E}\Big(e^{\lambda N_n}\Big) \leq \exp\Big((e^{\lambda} - 1)(H_n - 1)\Big).$$

49. Soient $\lambda > 0$ et $u \geqslant 0$.

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$

$$\{N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u\} = \Big\{e^{\lambda N_n} \geqslant e^{\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}\Big\}.$$

(b) En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $e^{\lambda N_n}$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u) \leq e^{-\lambda(\mathbb{E}(N_n)+u)}\, \mathbb{E}\Big(e^{\lambda N_n}\Big)\,.$$

(c) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u) \leq \exp\Big((e^{\lambda} - 1 - \lambda)(H_n - 1) - \lambda u\Big).$$

50. Soit $n \geqslant 2$, soit $u \geqslant 0$. En traitant à part le cas $u = 0$, puis, si $u > 0$, en choisissant

$$\lambda = \ln\left(1 + \frac{u}{H_n - 1}\right),$$

montrer que

$$\mathbb{P}(N_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u) \leq \exp\left(-(H_n - 1)\, h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right)\right).$$

51. En déduire que, pour tout $u \geqslant 0$, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(C_n \geqslant \mathbb{E}(N_n) + u) \leq \exp\left(-(H_n - 1)\, h\left(\frac{u}{H_n - 1}\right)\right).$$

Partie VII — Une forme plus simple et interprétation

52. En utilisant les résultats d'analyse établis au début du problème, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$H_n - 1 \leq \ln(n).$$

53. En utilisant les questions 12, 51 et 52, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $u \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(C_n \geqslant \ln(n) + u) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2(\ln(n) + \frac{u}{3})}\right).$$

54. Interpréter cette inégalité : que peut-on dire du comportement de C_n par rapport à $\ln(n)$ lorsque u est grand ?