24

Déterminants

24.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

24.1.1 Formes multilinéaires alternées

Définition 1: Formes multilinéaires alternées

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$.
On dit que f est une forme n-linéaire alternée sur E si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. f est linéaire par rapport à chaque variable, i.e. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

   est linéaire ;

2. f est alternée, i.e. pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$, on a

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque 1. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E.

• Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tel qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$. Puisque f est linéaire par rapport à chaque variable, on a alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

• Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tel qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$ vérifiant $x_i = x_j$. On a alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. En effet, d'après le caractère alterné de f, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n).$$

• Plus généralement, soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille liée. On a alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

En effet, par hypothèse, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ et des scalaires $(\lambda_k)_{k \neq i}$ tels que $x_i = \sum\limits_{k \neq i} \lambda_k x_k$.

Par n-linéarité de f, on a alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \neq i} \lambda_k f(x_1, \dots, \underbrace{x_k}_{i\text{-ème position}}, \dots, x_n) = 0$$

en utilisant la propriété précédente, car pour tout $k \neq i$, le n-uplet $(x_1, \dots, \underbrace{x_k}_{i\text{-ème position}}, \dots, x_n)$ comporte deux fois le vecteur x_k.

Théorème 1: Existence et unicité du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit e une base de E.
Il existe une unique forme n-linéaire alternée $\det_e : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\det_e(e) = 1$.
L'appication $\det_e$ est appelée déterminant dans la base e.

Démonstration. Hors-programme. ■

Corollaire 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit e une base de E. Soit $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.
Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_e$ (et nécessairement $\lambda = f(e)$).
Autrement dit, toutes les formes n-linéaires alternées sont des multiples de $\det_e$.

Démonstration. Notons $e = (e_1, \dots, e_n)$.
• Supposons que $f(e_1, \dots, e_n) = 0$. Montrons alors que $f = 0$.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tel que $x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$.

Alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} \lambda_{j_1,1} \dots \lambda_{j_n,n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}).$$

Or, puisque $f(e_1, \dots, e_n) = 0$, en utilisant le caractère alterné de f, on montre que pour tout $(j_1, \dots, j_n) \in [\![1, n]\!]^n$, on a $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ donc $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ et ce pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^\cdot$
On en déduit que $f = 0$, d'où $f = \lambda \det_e$ avec $\lambda = 0$.
• Supposons que $f(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ et posons $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$.
L'application $\frac{1}{\lambda} f$ est encore une forme n-linéaire alternée sur E et elle vérifie

$$\frac{1}{\lambda} f(e) = \frac{f(e)}{f(e)} = 1.$$

Par unicité du déterminant en base e, on en déduit que $\frac{1}{\lambda} f = \det_e$, d'où $f = \lambda \det_e$. ■

Corollaire 2: Formule de changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient e et e' deux bases de E.
Alors $\det_{e'} = \det_{e'}(e) \det_e$, i.e. pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{e'}(e) \det_e(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, puisque $\det_{e'}$ est une forme n-linéaire alternée sur E, on a $\det_{e'} = \lambda \det_e$ avec $\lambda = \det_{e'}(e)$ d'où le résultat. ■

Remarque 2. En prenant $(x_1, \dots, x_n) = e'$, on en déduit que

$$1 = \det_{e'}(e') = \det_{e'}(e) \det_e(e').$$

Corollaire 3: Caractérisation des bases par le déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit e une base de E.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Démonstration. • Supposons que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E. Notons-la e'.

D'après la remarque précédente, on a $\det_{e'}(e)\det_e(e') = 1$ donc on a nécessairement $\det_e(e') \neq 0$, i.e. $\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

• Montrons l'autre implication par contraposée. Supposons que $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas une base. Puisque $\dim(E) = n$ et que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est de cardinal n, si elle était libre, elle serait une base. On peut donc affirmer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée et puisque $\det_e$ est une forme n-linéaire alternée sur E, on déduit de la Remarque 1 que $\det_e(x_1, \ldots, x_n) = 0$. ■

Remarque 3. La contraposée dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $\det_e(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

24.1.2 Déterminant en dimensions 2 et 3

Proposition 1: Déterminant en dimension 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $e = (e_1, e_2)$ une base de E.
Soient $u = ae_1 + be_2$ et $v = ce_1 + de_2$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.
Alors

$$\det_e(u, v) = ad - bc.$$

Démonstration. En utilisant que $\det_e$ est l'unique forme bilinéaire alternée sur E telle que $\det_e(e) = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\det_e(u, v) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\
&= ac\underbrace{\det_e(e_1, e_1)}_{=0} + ad\det_e(e_1, e_2) + bc\det(e_2, e_1) + \underbrace{bd\det_e(e_2, e_2)}_{=0} \\
&= ad\det_e(e) - bc\det_e(e_1, e_2) \\
&= ad - bc.
\end{aligned}$$

■

Remarque 4. • On retrouve la condition de colinéarité de deux vecteurs. En effet, si on note $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, on sait d'après le corollaire précédent que la famille (u, v) est liée si et seulement si $\det_e(u, v) = 0$, i.e. les vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.

• Si e est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout couple de vecteurs $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\det_e(u, v)$ est l'aire orientée du parallélogramme formé à partir de l'origine grâce aux vecteurs u et v.

• Si $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ et e est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, en gardant les notations de la proposition précédente, on a $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,$v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ et $\det_e(u, v) = ad - bc$.

Ceci justifie la définition suivante.

Définition 2: Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
On définit le déterminant de la matrice A par

$$\det(A) = ad - bc.$$

On note également $\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Remarque 5. En fait, le déterminant d'une matrice carrée de taille 2 est défini comme le déterminant de ses colonnes, vues comme vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2.$$

Proposition 2: Déterminant en dimension 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soient $u = ae_1 + be_2 + ce_3, v = de_1 + ee_2 + fe_3$ et $w = ge_1 + he_2 + ie_3$ avec $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{K}^3$.
Alors
$$\det_e(u, v, w) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

Démonstration. En utilisant le caractère multilinéaire et alterné de $\det_e$, on a

$$\begin{aligned}
\det_e(u, v, w) &= \det_e(ae_1 + be_2 + ce_3, de_1 + ee_2 + fe_3, ge_1 + he_2 + ie_3) \\
&= aei \underbrace{\det_e(e_1, e_2, e_3)}_{=1} + afh\det_e(e_1, e_3, e_2) + bdi\det_e(e_2, e_1, e_3) + bfg\det_e(e_2, e_3, e_1) + \\
&\quad cdh\det_e(e_3, e_1, e_2) + ceg\det_e(e_3, e_2, e_1) \\
&= aei - afh\det_e(e_1, e_2, e_3) - bdi\det_e(e_1, e_2, e_3) - bfg\det_e(e_2, e_1, e_3) \\
&\quad -cdh\det_e(e_1, e_3, e_2) - ceg\det_e(e_1, e_2, e_3) \\
&= aei - afh - bdi + bfg\det_e(e_1, e_2, e_3) + cdh\det_e(e_1, e_2, e_3) - ceg \\
&= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.
\end{aligned}$$

■

Remarque 6. • Si e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors pour tout triplet de vecteurs $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$, $\det_e(u, v, w)$ est le volume orienté du parallélépipède formé à partir de l'origine grâce aux vecteurs u, v et w.

• Si $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et e est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, en gardant les notations de la proposition précédente, on a $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ et

$$\det_e(u, v, w) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

Ceci justifie la définition suivante.

Définition 3: Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
On définit le déterminant de la matrice A par

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

On note également $\det(A) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$

Remarque 7. En fait, le déterminant d'une matrice carrée de taille 3 est défini comme le déterminant de ses colonnes, vues comme vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(-2)\times1+0\times(-3)\times3+1\times2\times(-1)-1\times(-3)\times(-1)-0\times2\times1-1\times(-2)\times3 = -1.$$

24.2 Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

24.2.1 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 3: Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors
$$\det_e(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{e'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)).$$

On appelle ce scalaire déterminant de l'endomorphisme f et on le note $\det(f)$ (puisqu'il ne dépend pas de la base considérée).

Démonstration. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \det_{e'}(f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{array}$.

En utilisant le caractère n-linéaire alterné de $\det_{e'}$ et la linéarité de f, il est clair que φ est une forme n-linéaire alternée sur E.

Ainsi, $\varphi = \lambda \det_e$ où $\lambda = \varphi(e) = \det_{e'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

On a alors

$$\det_{e'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \varphi(e') = \varphi(e)\det_e(e') = \det_e(e')\det_{e'}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_e(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

■

Exemple 3. • Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On a
$$\det(\mathrm{Id}_E) = \det_e(\mathrm{Id}(e_1), \dots, \mathrm{Id}(e_n)) = \det_e(e_1, \dots, e_n) = \det_e(e) = 1.$$

Par n-linéarité du déterminant, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda \mathrm{Id}_E) = \det_e(\lambda \mathrm{Id}(e_1), \dots, \lambda \mathrm{Id}(e_n)) = \det_e(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n) = \lambda^n \det_e(e) = \lambda^n.$$

En particulier, $\det(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0$ et $\det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^n$.

• Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+3y) \end{array}$.

Soit $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On a $f(e_1) = f(1,0) = (2,1) = 2e_1 + e_2$ et $f(e_2) = f(0,1) = (-1,3) = -e_1 + 3e_2$.

Ainsi, $\det(f) = \det_e(f(e_1), f(e_2)) = 2 \times 3 - 1 \times (-1) = 7$.

Notons qu'il s'agit du déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit e une base de E.
Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on a

$$\det_e(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det(f)\det_e(x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration. En appliquant la preuve précédente à $e' = e$ et en utilisant le fait que $\varphi = \det(f)\det_e$, on a pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$,

$$\det_e(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \det(f)\det_e(x_1, \ldots, x_n).$$

■

Proposition 5: Déterminant d'une composée d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
Alors

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g).$$

Démonstration. Soit $n = \dim(E)$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
D'après la proposition précédente, on a

$$\det(f \circ g) = \det_e(f(g(e_1)), \ldots, f(g(e_n))) = \det(f)\det_e(g(e_1), \ldots, g(e_n)) = \det(f)\det(g).$$

■

Remarque 8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\det(\lambda f) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E \circ f) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E)\det(f) = \lambda^n \det(f).$$

Corollaire 4: Déterminant d'une puissance d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, \det(f^n) = \det(f)^n$.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $\det(f^0) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1 = \det(f)^0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\det(f^n) = \det(f)^n$.
Montrons que $\det(f^{n+1}) = \det(f)^{n+1}$.
D'après la proposition précédente, on a

$$\det(f^{n+1}) = \det(f^n \circ f) = \det(f^n)\det(f) = \det(f)^n \det(f) = \det(f)^{n+1},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. ■

Exemple 4. • Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie, i.e. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Alors $1 = \det(\mathrm{Id}_E) = \det(s^2) = \det(s)^2$ donc $\det(s) = \pm 1$.

Notons que les deux sont possibles : si $s = \mathrm{Id}_E$ alors $\det(s) = 1$ et si $s = -\mathrm{Id}_e$ avec $\dim(E)$ impair, alors $\det(s) = -1$.

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$.

Alors $0 = \det(f^p) = \det(f)^p$ donc $\det(f) = 0$.

Corollaire 5: Caractérisation des automorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et dans ce cas,

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration. • Supposons que f est un automorphisme. Soit $f^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ la bijection réciproque de f.

On a alors $\det(f)\det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1$ donc nécessairement $\det(f) \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

• Supposons que $\det(f) \neq 0$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Alors $\det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det(f) \neq 0$ donc la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de E. Puisque l'image d'une base de E par f est une base de E, on en déduit que f est un automorphisme. ■

Exemple 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Puisque $\det(f) = 0$, alors f n'est pas inversible.

24.2.2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 4: Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de A. Notons e la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On définit le déterminant de la matrice carrée A, noté $\det(A)$, par

$$\det(A) = \det_e(C_1, \ldots, C_n).$$

Remarque 9. • Le déterminant d'une matrice hérite donc des mêmes propriétés que le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, notamment le caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. De plus, si A admet deux colonnes identiques, ou si la famille de ses colonnes est liée, alors $\det(A) = 0$.

C'est en fait l'unique application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui est n-linéaire alternée par rapport aux colonnes et telle que $\det(I_n) = 1$.

• Le déterminant d'une matrice est le déterminant de la famille de ses colonnes, vues comme vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Via l'isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, on peut aussi interpréter le déterminant de A comme le déterminant de la famille de ses colonnes, vues comme vecteurs de $\mathbb{K}^n$, dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

• Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

Alors $\det(f) = \det(A)$.

En effet, soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. D'après la remarque précédente, on a bien

$$\det(f)=\det_e(f(e_1),\dots,f(e_n))=\det_e(C_1,\dots,C_n)=\det(A).$$

Exemple 6. • Si $A=\begin{pmatrix}a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$, alors $\det(A)=a$.

• Notons e la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $\det(I_n)=\det_e(e)=1$.
Ainsi, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}, \det(\lambda I_n)=\lambda^n\det(I_n)=\lambda^n$.
En particulier, $\det(0_n)=0$ et $\det(-I_n)=(-1)^n$.

• Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+3z,y-z,x+y)\end{array}$.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\det(f)=\det(A)=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&1&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=2\times1\times0+0\times1\times3+1\times(-1)\times(-1)-2\times1\times(-1)-0\times(-1)\times0-1\times1\times3=0.$$

En effet, on remarque que $C_3=C_1-C_2$. Puisque la famille (C_1,C_2,C_3) est liée, on a bien $\det(A)=0$.

Proposition 6: Lien entre les déterminants d'un endormorphisme et d'une matrice représentative

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit e une base de E.
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Soit $A=\mathrm{Mat}_e(f)$.
Alors

$$\det(f)=\det(A).$$

Démonstration. Notons $n=\dim(E)$ et $e=(e_1,\dots,e_n)$. Soit $\mathcal{B}=(e'_1,\dots,e'_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $g\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

Soit $u\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire qui envoie la base e sur la base $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $i\in[\![1,n]\!], u(e_i)=e'_i$. C'est donc un isomorphisme dont l'isomorphisme réciproque est l'application $u^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,E)$ qui envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base e, i.e. pour tout $i\in[\![1,n]\!], u^{-1}(e'_i)=e_i$.

On peut résumer la situation sous la forme du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}(E,e) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & (E,e) \\ (\mathbb{K}^n,\mathcal{B}) \arrow[r, "g"] & (\mathbb{K}^n,\mathcal{B}) \arrow[u, "u^{-1}"]\end{tikzcd}.$$

On a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$,

$$u^{-1}\circ g\circ u(e_j)=u^{-1}(g(e'_j))=u^{-1}\left(\sum_{i=1}^n A_{i,j}e'_i\right)=\sum_{i=1}^n A_{i,j}u^{-1}(e'_i)=\sum_{i=1}^n A_{i,j}e_i=f(e_j)$$

donc $f=u^{-1}\circ g\circ u$.

Ainsi, $\det(f)=\det(u^{-1})\det(g)\det(u)=\det(u)^{-1}\det(g)\det(u)=\det(g)$.

Or, d'après la remarque précédente, $\det(g)=\det(A)$ donc $\det(f)=\det(A)$. ■

Remarque 10. On en déduit que tous les endomorphismes ayant la même matrice représentative dans une certaine base ont le même déterminant.

De même, toutes les matrices représentant le même endomorphisme (dans des bases différentes) ont le même déterminant. On en déduit que deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exemple 7. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P' + P \end{array}$. L'application f est linéaire.

On a $f(1) = 1, f(X) = 2X+1$ et $f(X^2) = 3X^2+2X$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\det(f) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6 \neq 0.$$

Ainsi, f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 7: Déterminant d'un produit

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Notons e la base canonique de $\mathbb{K}^n$ Soient f et g les applications linéaires canoniquement associées à A et à B respectivement, i.e. $\mathrm{Mat}_e(f) = A$ et $\mathrm{Mat}_e(g) = B$.

Alors $\mathrm{Mat}_e(f \circ g) = AB$ donc $f \circ g$ est l'application linéaire canoniquement associée à AB. Ainsi,

$$\det(AB) = \det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(A)\det(B).$$

■

Corollaire 6: Déterminant d'une puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors pour tout $p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = \det(A)^p$.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation :** Pour $p = 0$, on a $\det(A^0) = \det(I_n) = 1 = \det(A)^0$ donc la propriété est vraie au rang $p = 0$.

• **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\det(A^p) = \det(A)^p$.

Montrons que $\det(A^{p+1}) = \det(A)^{p+1}$.

D'après la proposition précédente, on a

$$\det(A^{p+1}) = \det(A^p \times A) = \det(A^p)\det(A) = \det(A)^p \det(A) = \det(A)^{p+1},$$

ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence. ■

Corollaire 7: Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, on a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration. • Supposons que A est inversible. On a alors

$$1 = \det(I_n) = \det(A \times A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

On a donc nécessairement $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

• Supposons que $\det(A) \neq 0$. Notons e la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

Alors $\det(A) = \det_e(C_1, \dots, C_n) \neq 0$. Ainsi, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, ce qui équivaut au fait que A est inversible. ■

Remarque 11. • Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) = ad - bc \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

• On retrouve le fait que deux matrices semblables ont même déterminant. En effet, soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Alors $\det(B) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$.

Proposition 8: Déterminant d'une transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $\det(A^T) = \det(A)$.

Démonstration. Hors-programme. ■

24.3 Calcul des déterminants

24.3.1 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition 5: Mineurs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$. Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
On appelle mineur d'indice (i, j) de la matrice A, et on note $\Delta_{i,j}(A)$, le déterminant de taille $n - 1$ obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Exemple 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Alors $\Delta_{1,1}(A) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\Delta_{2,1}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\Delta_{1,3}(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$, $\Delta_{3,2}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$...

Proposition 9: Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Alors :

1. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A) \quad \text{(développement par rapport à la } j\text{-ème colonne).}$$
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A) \quad \text{(développement par rapport à la } i\text{-ème ligne).}$$

Démonstration.

1. Admis.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
En utilisant le fait que $\det(A) = \det(A^T)$ et en utilisant le développement par rapport à la i-ème colonne de A, on a

$$\det(A) = \det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (A^T)_{j,i} \Delta_{j,i}(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

■

Exemple 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

En développant par rapport à la troisième colonne, on a

$$\det(A) = (-1)^{1+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

Corollaire 8: Déterminant d'une matrice triangulaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire.
Alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Autrement dit, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.

Démonstration.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante : « Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. »

• **Initialisation :** Si $n = 1$, la propriété est évidente.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle l'est au rang $n+1$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, i.e. $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ 0 & a_{2,2} & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$.

En développant par rapport à la 1-ère colonne de A, puis par hypothèse de récurrence, on a

$$\det(A) = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & & & \\ 0 & a_{3,3} & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times \prod_{i=2}^{n+1} a_{i,i} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{i,i},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire inférieure, alors A^T est triangulaire supérieure donc

$$\det(A) = \det(A^T) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

■

Remarque 12. • On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses cœfficients diagonaux sont tous non nuls.

• Le résultat est notamment vrai pour les matrices diagonales.

Exemple 10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & (-1) \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times (-1) = -6.$$

24.3.2 Opérations élémentaires

Proposition 10: Effet des opérations élémentaires sur les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Notons A' la matrice obtenue à partir de A après l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$.
   Alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons A' la matrice obtenue à partir de A après l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
   Alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons A' la matrice obtenue à partir de A après l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.
   Alors $\det(A') = \det(A)$.

Démonstration. Tout ceci découle du caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. ■

Puisque $\det(A) = \det(A^T)$, il est également possible de faire des opérations élémentaires sur les lignes et celles-ci ont les mêmes effets.

Proposition 11: Effet des opérations élémentaires sur les lignes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Notons A' la matrice obtenue à partir de A après l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.
   Alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons A' la matrice obtenue à partir de A après l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
   Alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons A' la matrice obtenue à partir de A après l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
   Alors $\det(A') = \det(A)$.

24.3.3 Application : calcul du déterminant de Vandermonde

Proposition 12: Déterminant de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant de taille n suivant :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Alors

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

En particulier, la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ sont deux à deux distincts.

Démonstration. Tout d'abord, notons que s'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors la matrice possède deux lignes identiques, donc $V(x_1, \dots, x_n) = 0 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$. La formule est donc vraie dans ce cas.

On supposera donc dans la preuve suivante que les $(x_1, \dots, x_n)$ sont deux à deux distincts.

Montrons le résultat par récurrence sur n.

•**Initialisation :** Pour $n = 2$, on a

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n = 2$.

•**Hérédité :** Soit $n \geqslant 2$ fixé. Supposons que la propriété est vraie au rang n. Montrons qu'elle l'est au rang $n+1$.

Considérons $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.

Montrons que $V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$.

▷<u>1ère méthode :</u> On effectue les opérations $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - x_{n+1} C_n, C_n \leftarrow C_n - x_{n+1} C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - x_{n+1} C_1$(qui ne modifie pas le déterminant). On obtient

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_{n+1} & x_1(x_1 - x_{n+1}) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) \\ 1 & x_2 - x_{n+1} & x_2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_{n+1} & x_n(x_n - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$V(x_1,\dots,x_{n+1}) = (-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x_1-x_{n+1} & x_1(x_1-x_{n+1}) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-x_{n+1}) \\ x_2-x_{n+1} & x_2(x_2-x_{n+1}) & \dots & x_2^{n-1}(x_2-x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n-x_{n+1} & x_n(x_n-x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-x_{n+1}) \end{vmatrix}.$$

Par n-linéarité du déterminant par rapport aux lignes, puisque pour tout $i \in [\![1,n]\!], x_i - x_{n+1}$ est en facteur de la ligne L_i, on a

$$V(x_1,\dots,x_{n+1}) = (-1)^n\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_{n+1})\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence.

On en conclut que $V(x_1,\dots,x_{n+1}) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i)$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

▷2ème méthode :

Notons

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^n \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que P est un polynôme de degré n dont le cœfficient dominant est $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$ par hypothèse de récurrence.

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = 0$ car c'est le déterminant d'une matrice possédant deux lignes identiques. Ainsi, les n scalaires deux à deux distincts $(x_1,\dots,x_n)$ sont n racines du polynôme P, qui est de degré n et de cœfficient dominant $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

Donc $P = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$.

Ainsi, $V(x_1,\dots,x_{n+1}) = P(x_{n+1}) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1}-x_i) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i)$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

■

Remarque 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_0,x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0),\dots,P(x_n)) \end{array}$.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.

On a alors $\det(\varphi) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

Ainsi, $\det(\varphi) \neq 0$ si et seulement si les scalaires $(x_0, \dots, x_n)$ sont deux à deux distincts, i.e. φ est un isomorphisme si et seulement si les scalaires $(x_0, \dots, x_n)$ sont deux à deux distincts.