Liste d'exercices n°25 — Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Soit $u = (2, 1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 3, 0)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de $F^{\perp}$.
3. Donner la projection orthogonale de $w = (5, 2, -2, 2)$ sur F et sur $F^{\perp}$.
4. En déduire la distance de w à F.

Exercice 2. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E, \langle f(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2, \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. En déduire que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont orthogonaux.

Exercice 3. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de norme 1 dans E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \longrightarrow \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   Dans les questions suivantes, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini dans la question précédente.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!], \deg(P_k) = k$.
3. Soit $n = 2$. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, puis calculer $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 5. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est un projecteur orthogonal (i.e. $\ker(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$) si et seulement si, pour tout $x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 6. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $y \in E$. Montrer qu'il existe un unique $f^*(y) \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on ait
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} f^* : E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^*(y) \end{array}$$
   est un endomorphisme.
   f^* est appelé l'endomorphisme adjoint de f (notion hors-programme).

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit M la matrice de f dans la base (e). Montrer que la matrice de f^* dans la base (e) est M^T.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est stable par f^*.

Exercice 7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que
$$|\det(M)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|C_k\|$$
où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|C_k\| = \sqrt{C_k^T C_k}$.
Montrer de plus que, si pour tout $k \in [\![1, n]\!], C_k \neq 0$, l'inégalité est une égalité si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est orthogonale.