
Programme de colles 28

Semaine du 25/05

Questions de cours

Déterminants

1. Caractérisation des bases par le déterminant.
2. Déterminant d'un endomorphisme.
3. Caractérisation des matrices inversibles par le déterminant.
4. Déterminant d'une matrice triangulaire.

Espaces préhilbertiens réels

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
2. Norme associée à un produit scalaire.
3. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
4. Théorème de Pythagore.
5. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.
6. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$.
7. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Exercices

Déterminants

Calcul de déterminants de familles de vecteurs, d'applications linéaires, de matrices en utilisant les propriétés de calcul : multilinéarité, caractère alterné, invariance par transposition, développement par rapport à une ligne ou à une colonne.

Espaces préhilbertiens réels

- Vérification que des applications sont des produits scalaires.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Norme associée à un produit scalaire, identités de polarisation.
- Orthogonalité de vecteurs, théorème de Pythagore.
- Algorithme de Gram-Schmidt.
- Bases orthonormées, expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- Sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'une partie, supplémentaire orthogonal.
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.