Devoir maison n°15
A rendre pour jeudi 28 mai 2026

Exercice 1 : Théorème de Von Neumann

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Von Neumann, à savoir : une norme provient d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme. On a vu en cours le sens direct, montrons le sens réciproque.

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme, à savoir pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on pose $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

Il s'agit de vérifier que f est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire un produit scalaire, sur E.

1. Montrer que pour tout $x \in E, f(x,x) = \|x\|^2$.

2. Soit $(x,y,z) \in E^3$.

   a) Montrer que $f(x, y+z) = 2f(\frac{x}{2}, y) + 2f(\frac{x}{2}, z)$.
   En déduire que $f(x,y) = 2f(\frac{x}{2}, y)$ puis que $f(x, y+z) = f(x,y) + f(x,z)$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x, ny) = nf(x,y)$.

   c) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{Q}, f(x, ry) = rf(x,y)$.

   d) En déduire que l'application $y \mapsto f(x,y)$ est linéaire. (Indication : utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

3. Conclure.

Exercice 2 : Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Dans tout l'exercice, on considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle , \rangle$.

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. On rappelle que $\mathcal{C}$ est une base orthonormée dans E muni de son produit scalaire canonique.

Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Notons P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.

1. **a)** Justifier que pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!], P_{i,j} = \langle \varepsilon_j, e_i \rangle$ puis montrer que $P^T P = I_3$.

   b) En déduire que $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \pm 1$.

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe si $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = 1$, indirecte si $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = -1$. Il est clair que $\mathcal{C}$ est une base orthonormée directe.

On suppose désormais que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe.

2. Montrer que pour tout $(u, v, w) \in E^3, \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \det_{\mathcal{C}}(u, v, w)$.

Ainsi, le déterminant d'une famille de trois vecteurs dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe. Pour tout $(u, v, w) \in E^3$, on note alors

$$[u, v, w] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$$

le déterminant de la famille (u, v, w) dans n'importe quelle base orthonormée directe, qu'on appelle produit mixte de la famille (u, v, w).

3. Soient $(u, v) \in E^2$.

   a) Justifier que l'application

   $$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & [u, v, w] \end{array}$$

   est une forme linéaire et en déduire qu'il existe un unique vecteur de E, noté $u \wedge v$, tel que, pour tout $w \in E$, on ait

   $$[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle.$$

   On dit que le vecteur $u \wedge v$ est le produit vectoriel des vecteurs u et v.

   b) Montrer que $v \wedge u = -(u \wedge v)$.

   c) Montrer que pour tout $w \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

   $$(\lambda u + w) \wedge v = \lambda(u \wedge v) + w \wedge v \quad \text{et} \quad u \wedge (\lambda v + w) = \lambda(u \wedge v) + u \wedge w.$$

   d) Montrer que $u \wedge v = 0_E$ si et seulement si la famille (u, v) est liée.

   e) Montrer que $u \wedge v \in \text{Vect}(u, v)^{\perp}$.

   f) Notons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \wedge v) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$.

g) Montrer que $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1$ et $\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

h) On suppose dans cette question uniquement que la famille (u, v) est orthonormée. Montrer que $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

4. **a)** Montrer que pour tout $(u, v, w) \in E^3$,

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u \quad \text{et} \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

b) En déduire que

$$(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0_E.$$

5. Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, on a

$$\langle u, v \rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2.$$

6. Soient $(a, b) \in E^2$ avec $a \neq 0_E$.

Existe-t-il $x \in E$ tel que $a \wedge x = b$?