

Liste d'exercices n°26

Séries numériques

Exercice 1. Le but de cet exercice est d'établir la **formule de Stirling** (à connaître), à savoir

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. (a) Montrer que $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
 (b) Montrer que $\sum v_n$ converge et en déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 (c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \sim Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$.
2. On cherche maintenant à identifier la constante C . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.
- (c) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
- (d) Montrer que $W_n \sim W_{n+1}$ et en déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- (e) En déduire que $C = \sqrt{2\pi}$. Conclure.

Exercice 2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On appelle série de Bertrand la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

Montrer que la série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Exercice 3. Etudier la nature des séries dont voici le terme général

- | | | |
|---|---|------------------------------------|
| 1) $\frac{1+\ln n}{n^2}$ | 2) $\frac{2^{n+5}}{3^n - 11}$ | 3) $\frac{n+\ln n}{n^2+1}$ |
| 4) $n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ | 5) $n^{\ln(a)}$ ($a > 0$) | 6) $e^{-\sqrt{n}}$ |
| 7) $n \cdot n^{\frac{1}{n}}$ | 8) $\frac{1}{(1+n)^\alpha} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ($\alpha > 0$) | 9) $\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ |
| 10) $\frac{(n+1)^4}{n!+1}$ | 11) $\frac{1!+\dots+(n-1)!}{n!}$ | 12) $\frac{1!+\dots+(n-2)!}{n!}$. |

Exercice 4. Soit α un nombre réel. Pour tout entier strictement positif n , on pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}, w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 5. Pour tout entier positif n , on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$ et $v_n = \frac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. Calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 6. Pour chacune des suites (v_n) suivantes, déterminer si la série $\sum_n v_n$ converge et si oui calculer sa somme.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$, | b) $v_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, | c) $v_n = \frac{1}{n^3 - n}$, |
| d) $v_n = \sin \frac{\pi}{4n^2 - 1} \sin \frac{2n\pi}{4n^2 - 1}$, | e) $v_n = \frac{1}{n+1} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n} \right)$, | f) $v_n = \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$, |
| g) $v_n = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ | h) $v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, | i) $v_n = \arctan \frac{1}{2n^2}$. |

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^n (1 - v_k) = \frac{u_0}{S_n}$.
3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.
 - (a) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(1 - v_n)$?
 - (b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est divergente.
2. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On pose, pour $n > 0$, $v_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$.

1. On suppose que $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbb{C}$.
 - (a) Montrer que la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.
 - (b) Si la série de terme général v_n est convergente, calculer sa somme.
2. On suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général v_n est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

1. Si pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général u_n est convergente.
2. Si pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général $\sqrt{u_n}$ est convergente.
4. Si pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.
5. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.
6. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n^2 u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 11. Démontrer, à l'aide d'un développement limité, que la série de terme général u_n est convergente, avec $u_n = \sin(n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$.

Exercice 12. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que $f(0) = 0$, et $f'(0) = f''(0) = 1$. Etudier les séries de terme général

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right)$; (b) $f\left(\frac{1}{n^2}\right)$; (c) $f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$; (d) $f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ (ici f est de classe C^3).

Exercice 13. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que $u_n \sim v_n$ mais que la série $\sum v_n$ diverge.

Exercice 14. Indiquer pour chacune des séries suivantes s'il s'agit d'une série absolument convergente, si l'on peut lui appliquer le critère des séries alternées et si elle est convergente :

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$; | 2) $(-1)^n \frac{1+n}{n} (-1)^n \frac{1+n}{n}$; | 3) $\frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n}$; |
| 4) $\frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) ; | 5) $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$; | 6) $\frac{(-1)^n}{n - \ln n}$; |
| 7) $\frac{(-1)^n}{2n + \cos(n\pi)}$; | 8) $\frac{n+3}{(-1)^n \sqrt{n-3n}}$; | 9) $(-1)^n \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; |
| 10) $\ln\left(n \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$; | 11) $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$; | 12) $\frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$; |
| 13) $\frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n(n+1)}$. | | |

Exercice 15. Soit $x \in [0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{a_n}{10^{n+1}}$ où $a_n = [10^{n+1}x] - 10[10^n x]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.
2. Justifier que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+p} = a_n$.