

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°15

Exercice 1 : Théorème de Von Neumann

1. Soit $x \in E$. Par homogénéité de la norme, on a

$$\boxed{f(x, x)} = \frac{1}{4}(\|2x\|^2 + \|0_E\|^2) = \frac{1}{4} \times 4\|x\|^2 = \boxed{\|x\|^2}.$$

2. a) En utilisant l'identité du parallélogramme (en particulier que pour tout $(u, v) \in E^2$, $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$), on a

$$\begin{aligned} \boxed{2f\left(\frac{x}{2}, y\right) + 2f\left(\frac{x}{2}, z\right)} &= \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{x}{2} + y \right\|^2 - \left\| \frac{x}{2} - y \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x}{2} - z \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{x}{2} + y \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} + z \right\|^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{x}{2} - y \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} - z \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\| \frac{x}{2} + y + \frac{x}{2} + z \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} + y - \frac{x}{2} - z \right\|^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\left\| \frac{x}{2} - y + \frac{x}{2} - z \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} - y - \frac{x}{2} + z \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\| x + y + z \right\|^2 + \left\| y - z \right\|^2 - \left\| x - y - z \right\|^2 - \underbrace{\left\| -y + z \right\|^2}_{=\|y-z\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\| x + y + z \right\|^2 - \left\| x - y - z \right\|^2 \right) \\ &= \boxed{f(x, y + z)}. \end{aligned}$$

Pour $z = 0_E$, on constate que $f\left(\frac{x}{2}, z\right) = f\left(\frac{x}{2}, 0_E\right) = \frac{1}{4}(\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x}{2}\right\|^2) = 0$ donc la relation précédente devient $\boxed{f(x, y) = 2f\left(\frac{x}{2}, y\right)}$.

On a de même $f(x, z) = 2f\left(\frac{x}{2}, z\right)$ donc on obtient

$$\boxed{f(x, y + z) = 2f\left(\frac{x}{2}, y\right) + 2f\left(\frac{x}{2}, z\right) = f(x, y) + f(x, z)}.$$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x, ny) = nf(x, y)$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $f(x, 0 \times y) = f(x, 0_E) = 0 = 0 \times f(x, y)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $f(x, ny) = nf(x, y)$. Montrons que $f(x, (n+1)y) = (n+1)f(x, y)$.

D'après la question précédente, on a

$$f(x, (n+1)y) = f(x, ny+y) = f(x, ny) + f(x, y) = nf(x, y) + f(x, y) = (n+1)f(x, y)$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

On a bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f(x, ny) = nf(x, y)}$.

c) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord, notons que $f(x, -y) = \frac{1}{4}(\|x-y\|^2 - \|x+y\|^2) = -f(x, y)$ donc $f(x, py) = f(x, (-p)(-y)) = -pf(x, -y) = pf(x, y)$ où on a utilisé la question précédente avec $-p \in \mathbb{N}$.

Ainsi, puisque $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$qf(x, ry) = f(x, qry) = f(x, py) = pf(x, y)$$

donc $\boxed{f(x, ry) = \frac{p}{q}f(x, y) = rf(x, y)}$.

d) Par continuité de la norme $\|\cdot\|$ sur E , l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur E .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lambda$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x, r_n y) = r_n f(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda f(x, y).$$

Par ailleurs, par continuité de $y \mapsto f(x, y)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x, r_n y) = f(x, \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n y) = f(x, \lambda y).$$

Par unicité de la limite, il vient $f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

Ainsi, pour tout $(y, y') \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a d'après ce qui précède et d'après la question 2.a.,

$$f(x, \lambda y + \mu y') = f(x, \lambda y) + f(x, \mu y') = \lambda f(x, y) + \mu f(x, y')$$

donc $\boxed{y \mapsto f(x, y) \text{ est linéaire.}}$

3. Soit $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

• f est symétrique : en effet, pour tout $(x, y) \in E^2$, puisque $\|x-y\| = \|y-x\|$, on a

$$f(y, x) = \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = f(x, y).$$

- D'après la question précédente, pour tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est linéaire et par symétrie de f , on en déduit que pour tout $y \in E$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire donc f est bilinéaire.

- f est positive : en effet, d'après la question 1, pour tout $x \in E$, $f(x, x) = \|x\|^2 \geq 0$.
- f est définie : en effet, par séparation de la norme, pour tout $x \in E$, on a

$$f(x, x) = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E.$$

Ainsi, f est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire un produit scalaire sur E .

D'après la question 1, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{f(x, x)}$ donc

la norme $\|\cdot\|$ est issue du produit scalaire f .

Exercice 2 : Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3

1. a) Soit $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Par définition de P , on a $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^3 P_{i,j} e_i$.

Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E , on a pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $P_{i,j} = \langle \varepsilon_j, e_i \rangle$.

On a $P^T P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on a

$$(P^T P)_{i,j} = \sum_{k=1}^3 (P^T)_{i,k} P_{k,j} = \sum_{k=1}^3 P_{k,i} P_{k,j} = \sum_{k=1}^3 \langle \varepsilon_i, e_k \rangle \langle \varepsilon_j, e_k \rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$$

d'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée.

Puisque $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée de E , on en déduit que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on a $(P^T P)_{i,j} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{i,j}$, i.e. $P^T P = I_3$.

- b) On a $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \det(P)$.

D'après la question précédente, on a

$$1 = \det(I_3) = \det(P^T P) = \det(P^T) \det(P) = \det(P)^2$$

donc $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \det(P) = \pm 1$.

2. Soient $(u, v, w) \in E^3$.

D'après la formule de changement de base, on a $\det_{\mathcal{C}}(u, v, w) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$.

Puisque \mathcal{B} est une base orthonormée directe, on a $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = 1$ donc on obtient

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \det_{\mathcal{C}}(u, v, w).$$

3. a) Par multilinéarité du déterminant, l'application $f : w \mapsto [u, v, w]$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien E . D'après le théorème de représentation des formes linéaire sur un espace euclidien, on en déduit qu'il existe un unique vecteur, qu'on note $u \wedge v$ (car f dépend de u et v) tel que pour tout $w \in E$, $f(w) = \langle u \wedge v, w \rangle$, i.e.

$$\text{pour tout } w \in E, [u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle.$$

b) En utilisant le caractère alterné du déterminant, pour tout $w \in E$, on a

$$\langle v \wedge u, w \rangle = [v, u, w] = -[u, v, w] = -\langle u \wedge v, w \rangle = \langle -u \wedge v, w \rangle.$$

Ceci étant vrai pour tout $w \in E$, on en déduit que $v \wedge u = -u \wedge v$.

c) Soit $w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} \langle (\lambda u + w) \wedge v, x \rangle &= [\lambda u + w, v, x] \\ &= \lambda[u, v, x] + [w, v, x] \quad \text{par multilinéarité du déterminant} \\ &= \lambda \langle u \wedge v, x \rangle + \langle w \wedge v, x \rangle \quad \text{par définition du produit vectoriel} \\ &= \langle \lambda(u \wedge v) + w \wedge v, x \rangle \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire.} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $(\lambda u + w) \wedge v = \lambda(u \wedge v) + w \wedge v$.

Ainsi, on a

$$u \wedge (\lambda v + w) = -(\lambda v + w) \wedge u = -\lambda(v \wedge u) - w \wedge u = \lambda(u \wedge v) + u \wedge w.$$

d) Si u et v sont liés, alors pour tout $w \in E$, la famille (u, v, w) est liée donc $[u, v, w] = 0$, i.e. pour tout $w \in E$, $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$, ce qui implique que $u \wedge v = 0_E$.

Montrons la réciproque par contraposée : si u et v sont libres, alors on peut compléter la famille (u, v) en une base (u, v, w) de E de telle sorte que $[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle \neq 0$. On a donc nécessairement dans ce cas $u \wedge v \neq 0$.

Finalement, on a l'équivalence

$$u \wedge v = 0_E \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ sont liés.}$$

e) Puisque les familles (u, v, u) et (u, v, v) sont liées, $\langle u \wedge v, u \rangle = [u, v, u] = 0$ et $\langle u \wedge v, v \rangle = [u, v, v] = 0$.

Puisque $u \wedge v$ est orthogonal à une famille génératrice de $\text{Vect}(u, v)$, on en déduit que $u \wedge v \in \text{Vect}(u, v)^\perp$.

f) Soit $w = w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + w_3\varepsilon_3$. Puisque la base orthonormée \mathcal{B} est directe, on a

$$[u, v, w] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

On développe ce déterminant :

$$\begin{aligned} [u, v, w] &= u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3 \\ &= \langle (u_2v_3 - u_3v_2)\varepsilon_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\varepsilon_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\varepsilon_3, w \rangle. \end{aligned}$$

Par définition du produit vectoriel $u \wedge v$, puisque cette égalité est vraie pour tout $w \in E$, on en déduit

$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2)\varepsilon_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\varepsilon_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\varepsilon_3$$

d'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \wedge v) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$.

g) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_3)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_2)$$

donc

$$\boxed{\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1 = \varepsilon_2.}$$

h) Supposons que (u, v) est une famille orthonormée (donc libre) de E .

Alors, d'après la question 3.e, $(u \wedge v)$ est un vecteur normal (non nul car u et v sont libres) au plan $P = \text{Vect}(u, v)$. Ainsi, la famille $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthogonale de E .

Il existe $\lambda = \frac{1}{\|u \wedge v\|} \in \mathbb{R}^+$ tel que $(u, v, \lambda u \wedge v)$ est une base orthonormée de E .

Ainsi,

$$1 = \|[u, v, \lambda u \wedge v]\| = |\lambda| \|[u, v, u \wedge v]\| = \lambda \|[u, v, u \wedge v]\| = \lambda |\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle| = \lambda \|u \wedge v\|^2 = \|u \wedge v\|$$

donc $\lambda = \frac{1}{\|u \wedge v\|} = 1$ et on en déduit que $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée de E . De plus, on a vu que $\|[u, v, u \wedge v]\| = \|u \wedge v\|^2 = 1$ donc $\boxed{(u, v, u \wedge v) \text{ est une base orthonormée directe de } E.}$

4. a) Soient $(u, v, w) \in E^3$.

• Supposons que la famille (u, v) est liée. Sans perte de généralité, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$. On a alors $u \wedge v = 0_E$ donc $(u \wedge v) \wedge w = 0_E$ d'une part, et d'autre part

$$\langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u = \lambda \langle u, w \rangle u - \langle \lambda u, w \rangle u = 0_E$$

donc on a bien $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.

• Supposons que la famille (u, v) est libre. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée de $\text{Vect}(u, v)$ qu'on obtient après l'algorithme de Gram-Schmidt, i.e. tel que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Dans la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$. D'après l'expression du produit vectoriel dans une base orthonormée, on a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \wedge v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ac \end{pmatrix}$ puis $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((u \wedge v) \wedge w) = \begin{pmatrix} -ace \\ acd \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, d'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, on a

$$\langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u = ad(b\varepsilon_1 + c\varepsilon_2) - (bd + ce)a\varepsilon_1 = -ace\varepsilon_1 + acd\varepsilon_2 = (u \wedge v) \wedge w.$$

Dans tous les cas, on a bien $\boxed{(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u.}$

En réutilisant ce résultat (en échangeant u et w), on a

$$\boxed{u \wedge (v \wedge w) =} - (v \wedge w) \wedge u = (w \wedge v) \wedge u = \boxed{\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.}$$

b) Soient $(u, v, w) \in E^3$. En utilisant trois fois le résultat de la question précédente, on trouve

$$(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = (\langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u) + (\langle u, v \rangle w - \langle u, w \rangle v) + (\langle v, w \rangle u - \langle u, v \rangle w)$$

$$\text{d'où } \boxed{(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0_E.}$$

5. Soient $(u, v) \in E^2$.

• Si la famille (u, v) est liée, alors $u \wedge v = 0_E$ donc $\|u \wedge v\| = 0$ et d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ donc on a bien dans ce cas $\langle u, v \rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

• Supposons que la famille (u, v) est libre. En construisant la même base orthonormée directe \mathcal{B} qu'en question 4.a), on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après l'expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée, on a $\langle u, v \rangle^2 = (ab)^2$, $\|u\|^2 = a^2$ et $\|v\|^2 = b^2 + c^2$.

De plus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \wedge v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ac \end{pmatrix}$ donc $\|u \wedge v\|^2 = (ac)^2$.

Ainsi, on a $\langle u, v \rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = (ab)^2 + (ac)^2 = a^2(b^2 + c^2) = \|u\|^2 \|v\|^2$.

Dans tous les cas, on a bien $\boxed{\langle u, v \rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2.}$

6. Procédons par analyse-synthèse.

• Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $a \wedge x = b$. D'après la question 3.e), ceci implique que a et b sont orthogonaux. C'est donc une condition nécessaire d'existence de x .

• Vérifions que cette condition est suffisante. Supposons que a et b sont orthogonaux.

Posons $x = \frac{1}{\|a\|^2}(b \wedge a)$ (possible car $a \neq 0_E$).

D'après la question 4.a), on a

$$a \wedge x = \frac{1}{\|a\|^2}(a \wedge (b \wedge a)) = \frac{1}{\|a\|^2} \left(\langle a, a \rangle b - \underbrace{\langle a, b \rangle}_{=0} a \right) = b.$$

On en conclut qu'il existe $x \in E$ tel que $a \wedge x = b$ si et seulement si a et b sont orthogonaux

et, dans ce cas, on peut poser $x = \frac{1}{\|a\|^2}(b \wedge a)$.

Remarque : la solution x n'est pas unique. En effet, en notant $x_0 = \frac{1}{\|a\|^2}(b \wedge a)$, pour tout $x \in E$, on a

$$a \wedge x = b \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge x_0 \Leftrightarrow a \wedge (x - x_0) = 0_E \Leftrightarrow (a, x - x_0) \text{ est liée} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = x_0 + \lambda a.$$