
Programme de colles 29

Semaine du 01/06

Questions de cours

Espaces préhilbertiens réels

1. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$.
3. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Séries numériques

1. Nature des séries géométriques.
2. Série exponentielle.
3. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
4. Théorème de comparaison séries-intégrales.
5. Nature des séries de Riemann.

Exercices

Espaces préhilbertiens réels

- Vérification que des applications sont des produits scalaires.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Norme associée à un produit scalaire, identités de polarisation.
- Orthogonalité de vecteurs, théorème de Pythagore.
- Algorithme de Gram-Schmidt.
- Bases orthonormées, expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- Sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'une partie, supplémentaire orthogonal.
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Séries numériques

- Manipulation des séries de référence : séries géométriques, série exponentielle, séries de Riemann.
- Séries à termes positifs : théorèmes de comparaison (notamment séries-intégrales).