26

Séries numériques

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

26.1 Séries numériques

26.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1: Série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle suite des sommes partielles, et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit que la série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, est convergente si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est et dans ce cas, on note

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

En cas de convergence, la limite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée la somme de la série de terme général u_n.
Dans le cas où la série est convergente, on appelle reste d'ordre n de la série la différence $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, et on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.
Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge.

Remarque 1. La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite. En effet, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ converge également.

Réciproquement, si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, alors pour tout $n \geq n_0$, la série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ converge puisque $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$.

Proposition 1: Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général u_n converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
(Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement).

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on a $S_n - S_{n-1} = u_n$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$. On obtient donc le résultat voulu. ■

Remarque 2. La réciproque est fausse comme le montre la série harmonique : en effet, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Proposition 2: Linéarité de la somme

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.
Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

On note $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

D'après le résultat analogue sur les suites, on sait que la suite $(\lambda S_n + \mu T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et vérifie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda S_n + \mu T_n = \lambda S + \mu T$, i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

■

Proposition 3: Lien suite-série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.
La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est dite télescopique.

Démonstration. En effet, pour tout entier naturel n, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$ donc la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ■

Proposition 4: Séries géométriques

Soit $a \in \mathbb{K}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Démonstration. • Supposons que la série $\sum a^n$ converge.
Alors on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = 0$, ce qui implique que $|a| < 1$.
• Réciproquement, supposons que $|a| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Puisque $|a| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1}{1-a}$. ■

Exemple 1. • Pour $a = \dfrac{1}{2}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.
• On a

$$0,99999\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Proposition 5: Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \exp(tz) \end{array}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1]$, on a $f^{(n)}(t) = z^n \exp(tz)$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0,1]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \leqslant M \frac{t^{n+1}}{(n+1)!},$$

où $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f^{(n+1)}(t)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |z|^{n+1} |\exp(tz)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |z|^{n+1} \exp(t\mathrm{Re}(z)) = |z|^{n+1}\exp(\mathrm{Re}(z))$.
Ainsi, avec $t = 1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}\exp(\mathrm{Re}(z))}{(n+1)!}.$$

Par croissance comparée,on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(z) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 0$, d'où $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. ■

Remarque 3. On retrouve que $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

26.1.2 Séries à termes positifs

Proposition 6

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. Ceci découle du fait que si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$.

Ainsi, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors pour tout réel $M > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $S_n > M$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. ■

Théorème 1: Comparaison de séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

1. Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
2. Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

Démonstration.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

On a donc pour tout entier $0 \leqslant S_n \leqslant T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors la suite des sommes partielles $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également majorée. A fortiori, la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée non plus. A fortiori, la série $\sum v_n$ diverge.

■

Exemple 2. Pour tout $n \geqslant 2, 0 < \ln(n) \leqslant n$ donc $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Proposition 7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs.
Si $u_n \sim v_n$, alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Puisque $u_n \sim v_n$, i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon v_n.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, on a $-\varepsilon v_n \leqslant u_n - v_n \leqslant \varepsilon v_n$, d'où pour tout $n \geqslant n_0$,

$$(1-\varepsilon)v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)v_n.$$

Puisqu'on a choisi $0 < \varepsilon < 1$, alors $1-\varepsilon > 0$ et le résultat découle du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. ■

Exemple 3. • On a pour tout $n \in \mathbb{N}, \arctan(\frac{1}{2^n}) \geqslant 0$ et $\arctan(\frac{1}{2^n}) \sim \frac{1}{2^n}$. Puisque la série à termes positifs $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on en déduit que la série à terms positifs $\sum \arctan(\frac{1}{2^n})$ converge.

• On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sin(\frac{1}{n}) \geqslant 0$ et $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Puisque la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit que la série à termes positifs $\sum \sin(\frac{1}{n})$ diverge.

Remarque 4. Attention : ce critère n'est plus vrai si on l'applique à des séries qui ne sont pas à termes positifs. Nous en verrons des exemples plus tard.

26.1.3 Comparaison séries-intégrales

Théorème 2: Théorème de comparaison séries-intégrales

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et décroissante.
Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n f(t)dt$ existe et est finie.

Démonstration. Soit $k \geqslant 1$. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)dt.$$

Soit $n \geqslant 1$. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^n f(k) \leqslant \int_0^n f(t)dt,$$

d'où

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^n f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt.$$

Or $f(0) \geqslant \int_0^1 f(t)dt$ donc finalement

$$\int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^n f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt.$$

Puisque f est positive, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum\limits_{k=0}^n f(k)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^n f(t)dt$ sont positives et croissantes. Ainsi, elles sont convergentes si et seulement si elles sont majorées. D'après les inégalités obtenues, si l'une des deux converge, on en déduit une majoration pour l'autre. En revanche, si l'une diverge, i.e. n'est pas majorée, il en est de même pour l'autre.

L'équivalence du théorème en découle. ■

Remarque 5. Plus généralement, si $f : [n_0; +\infty[\to \mathbb{R}^+$ est continue, positive et décroissante pour un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt < +\infty$.

Exemple 4. Considérons $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. f est continue par morceaux, positive et décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^n f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$. On retrouve que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Etudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Pour tout $k \geqslant 2$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

Soit $n \geqslant 2$, en sommant pour k allant de 2 à n, on obtient $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{dt}{t}$, d'où

$$\ln(n+1) \underbrace{-\ln(2)+1}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)+1$$

et finalement par croissance de la fonction ln :

$$\ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)+1.$$

On déduit de cette double inégalité que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

Or, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) - \ln(n)$, d'où pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de limite monotone, elle est convergente.

Sa limite est appelée la constante d'Euler-Mascheroni, et est notée γ. On a donc

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \simeq 0,577.$$

On ignore encore si γ est un nombre rationnel ou non.

Proposition 8: Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty$ et si $\alpha = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 1$ donc dans ces deux cas, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Supposons maintenant $\alpha > 0$. D'après le théorème de comparaison séries-intégrales, on a l'équivalence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty.$$

1. Si $\alpha = 1$, on a pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc on retrouve que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. Si $\alpha \neq 1$, on a pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$.
   (a) Si $\alpha > 1$, on a $1-\alpha < 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} = 0$.
   Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} < +\infty$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
   (b) Si $\alpha < 1$, on a $1-\alpha > 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} = +\infty$.
   Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

■

Exemple 5. • $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

26.2 Séries absolument convergentes

Définition 2: Séries absolument convergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ l'est.
Si la série de terme général u_n est absolument convergente, on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty.$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Proposition 9: Absolue convergence implique convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général u_n est convergente.

Démonstration.

1. Supposons d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles.
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = -\min(u_n, 0)$.
   Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \geqslant 0$, $u_n^- \geqslant 0$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,, on a $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$.
Par comparaison, on en déduit que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes, donc par somme, la série $\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$ est convergente.

2. Supposons maintenant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs complexes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \mathrm{Re}(u_n) + i\mathrm{Im}(u_n)$, où $\mathrm{Re}(u_n)$ et $\mathrm{Im}(u_n)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de u_n.
Ainsi, les suites $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles et vérifient pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant |\mathrm{Re(u_n)}| \leqslant |u_n| \text{ et } 0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|.$$
D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que les séries $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$ sont convergentes.
Ainsi, les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ sont des séries absolument convergentes à termes réels.
D'après le premier alinéa de la démonstration, les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ sont toutes les deux convergentes. Par combinaison linéaire, on en déduit donc la convergence de la série $\sum u_n$ et on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$
■

Exemple 6. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n^z = \exp(z\ln(n))$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| = \dfrac{1}{|\exp(z\ln(n))|} = \dfrac{1}{\exp(\mathrm{Re}(z)\ln(n))} = \dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$.

Or, puisque $\mathrm{Re}(z) > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$ converge donc la série $\sum \frac{1}{n^z}$ est absolument convergente si $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(z) > 1$, on pose $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$: c'est la fonction zeta de Riemann.

Remarque 6. La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Proposition 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes, soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que $u_n = O(v_n)$ et que la série $\sum v_n$ converge.
Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ aussi. ■

Remarque 7. Si $u_n = o(v_n)$, le résultat demeure.

Exemple 7. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\cos(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc $\dfrac{\cos(n)}{n^2} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Puisque la série à termes positifs $\dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente.

26.3 Compléments sur les séries à valeurs réelles

26.3.1 Règle de d'Alembert

Lemme 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. L'hypothèse implique que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $w_{n+1} \leqslant w_n$.

La suite $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante donc pour tout $n \geqslant n_0$, on a $w_n \leqslant w_{n_0}$ i.e. pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant w_{n_0} v_n$.

La conclusion découle alors du théorème de comparaison de séries à termes positifs. ■

Théorème 3: Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Alors :

1. Si $L < 1$, la série de terme général u_n converge ;
2. Si $L > 1$, la série de terme général u_n diverge ;
3. Si $L = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration.

1. Supposons que $L < 1$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L + \varepsilon < 1$.
   Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| \leqslant \varepsilon$, i.e. pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant L + \varepsilon = \dfrac{(L+\varepsilon)^{n+1}}{(L+\varepsilon)^n}$.
   On pose $v_n = (L+\varepsilon)^n$ pour tout entier naturel n.
   Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. D'autre part, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $L + \varepsilon \in]0,1[$ donc la série $\sum v_n$ est convergente.
   D'après la proposition précédente, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Supposons que $L > 1$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L - \varepsilon > 1$.
   Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| \leqslant \varepsilon$, i.e. pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant L - \varepsilon = \dfrac{(L-\varepsilon)^{n+1}}{(L-\varepsilon)^n}$.
   On pose $v_n = (L-\varepsilon)^n$ pour tout entier naturel n.
   Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. D'autre part, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $L - \varepsilon > 1$ donc la série $\sum v_n$ est divergente.
   D'après la proposition précédente, on en déduit que la série $\sum u_n$ est divergente.
3. Si $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et la série $\sum u_n$ diverge.
   Si $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ et la série $\sum v_n$ converge.

■

26.3.2 Théorème spécial des séries alternées

Théorème 4: Théorème spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante, et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ est convergente.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|R_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leqslant u_{n+1}$, $R_{2n+1} \geqslant 0$ et $R_{2n} \leqslant 0$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

On a $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Ainsi, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Ainsi, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par hypothèse.

On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles sont donc convergentes, de même limite S, ce qui implique que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers S, i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = S.$$

On a pour tout entier naturel n,

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}.$$

Ainsi, $R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \geqslant 0$ et $R_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$.
De même, $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$ et $|R_{2n}| = S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$. ■

Exemple 8.

1. On en déduit que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, ce qui fournit un exemple de série convergente mais non absolument convergente.
2. De même, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

   Or, on a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ mais la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ n'est pas convergente, puisqu'elle est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

   Ceci montre qu'on peut avoir deux suites équivalentes dont les séries ne sont pas de même nature.