

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°9
Samedi 6 juin 2026 (4h00)

Problème 1 : Matrices de Gram et familles obtusangles

Partie I : Matrices et déterminants de Gram

1. (a) On a $G(u) = |\langle u, u \rangle| = \|u\|^2$.

(b) Soient $(u, v) \in E^2$. On a $G(u, v) = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{vmatrix} = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$.

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ avec égalité si et seulement si la famille (u, v) est liée. On en déduit que $G(u, v) \geq 0$ et que

$G(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v)$ est liée.

(c) • Si pour tout $i \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\langle u_1, u_i \rangle = 0$, on a

$$G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle u_p, u_2 \rangle & \dots & \langle u_p, u_p \rangle \end{vmatrix}$$

et en développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$G(u_1, \dots, u_p) = \|u_1\|^2 \begin{vmatrix} \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p, u_2 \rangle & \dots & \langle u_p, u_p \rangle \end{vmatrix} = \|u_1\|^2 G(u_2, \dots, u_p).$$

• Si la famille (u_1, \dots, u_p) est orthogonale, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket$ avec $i \neq j$, on a $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ donc

$$G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle u_2, u_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \langle u_p, u_p \rangle \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

2. (a) Puisque $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_j = \sum_{i=1}^n \langle u_j, e_i \rangle e_i$ donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A_{i,j} = \langle u_j, e_i \rangle$.

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$(A^T A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} = \sum_{k=1}^n \langle u_i, e_k \rangle \langle u_j, e_k \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = (M(u_1, \dots, u_n))_{i,j}$$

d'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, donc $M(u_1, \dots, u_n) = A^T A$.

(b) On a alors $G(u_1, \dots, u_n) = \det(M(u_1, \dots, u_n)) = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2$ donc $G(u_1, \dots, u_n) \geq 0$.

On a alors $G(u_1, \dots, u_n) = 0$ si et seulement si $\det(A) = 0$. Puisque A est la matrice de la famille (u_1, \dots, u_n) dans la base \mathcal{B} , on sait que A est inversible si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_n) est une base de E , si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_n) est libre (puisque c'est une famille à n vecteurs dans E qui est de dimension n). Par contraposée, $\det(A) = 0$ si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_n) est liée, i.e. $G(u_1, \dots, u_n) = 0$ si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_n) est liée.

3. (a) Puisque F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , on a $E = F \oplus F^\perp$ donc $\exists!(a, b) \in F \times F^\perp, u_p = a + b$. Notons que $a = p_F(u_p)$ et $b = u_p - p_F(u_p)$.

(b) Puisque $a \in F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$, il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tels que $a = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i$ d'où $b = u_p - a = u_p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i$.

Effectuons l'opération $L_p \leftarrow L_p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i L_i$ sur la matrice $M(u_1, \dots, u_p)$. Cela ne modifie pas le déterminant et on obtient alors par bilinéarité du produit scalaire

$$G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_{p-1}, u_1 \rangle & \langle u_{p-1}, u_2 \rangle & \dots & \langle u_{p-1}, u_p \rangle \\ \langle u_p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i, u_1 \rangle & \langle u_p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i, u_2 \rangle & \dots & \langle u_p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i, u_p \rangle \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_{p-1}, u_1 \rangle & \langle u_{p-1}, u_2 \rangle & \dots & \langle u_{p-1}, u_p \rangle \\ \langle b, u_1 \rangle & \langle b, u_2 \rangle & \dots & \langle b, u_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Or, $b \in F^\perp$ donc $\langle b, u_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et on a

$$G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_{p-1} \rangle & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \dots & \langle u_2, u_{p-1} \rangle & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_{p-1}, u_1 \rangle & \dots & \langle u_{p-1}, u_{p-1} \rangle & \langle u_{p-1}, u_p \rangle \\ 0 & \dots & 0 & \langle b, u_p \rangle \end{vmatrix} = \langle b, u_p \rangle G(u_1, \dots, u_{p-1})$$

en développant par rapport à la dernière ligne.

Or, $\langle b, u_p \rangle = \langle b, a + b \rangle = \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle = \|b\|^2$ car $\langle a, b \rangle = 0$ puisque $(a, b) \in F \times F^\perp$.

On trouve donc bien $G(u_1, \dots, u_p) = \|b\|^2 G(u_1, \dots, u_{p-1})$.

(c) Montrons par récurrence sur $p \geq 2$ que $G(u_1, \dots, u_p) \geq 0$ et que la famille (u_1, \dots, u_p) est liée si et seulement si $G(u_1, \dots, u_p) = 0$.

• **Initialisation** : Le cas $p = 2$ a été vu en question 1.b).

• **Hérédité** : Soit $p \geq 3$. On suppose que la propriété est vraie au rang $p - 1$. Montrons qu'elle est vraie au rang p .

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

Avec les notations des questions précédentes, on a

$$G(u_1, \dots, u_p) = \|u_p - p_F(u_p)\|^2 G(u_1, \dots, u_{p-1}).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $G(u_1, \dots, u_{p-1}) \geq 0$ donc on a bien $G(u_1, \dots, u_p) \geq 0$.

On a $G(u_1, \dots, u_p) = 0$ si et seulement si $G(u_1, \dots, u_{p-1}) = 0$ ou $u_p = p_F(u_p)$ si et seulement si (u_1, \dots, u_{p-1}) est liée (par hypothèse de récurrence) ou $u_p \in F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$.

Or, si la famille (u_1, \dots, u_{p-1}) est libre, la famille (u_1, \dots, u_p) est liée si et seulement si $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$ donc la famille (u_1, \dots, u_p) est liée si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_{p-1}) est liée ou si $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Finalement, on a bien $G(u_1, \dots, u_p) = 0$ si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_p) est liée, ce qui prouve la propriété au rang p .

Par principe de récurrence, on a bien montré que $G(u_1, \dots, u_p) \geq 0$ et que

$$G(u_1, \dots, u_p) = 0 \text{ si et seulement si } (u_1, \dots, u_p) \text{ est liée.}$$

4. On a $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

D'après la question 3.b), on a $G(u_1, \dots, u_p, x) = G(u_1, \dots, u_p) \|x - p_F(x)\|^2 = G(u_1, \dots, u_p) d(x, F)^2$.

D'après la question précédente, puisque (u_1, \dots, u_p) est libre, on a $G(u_1, \dots, u_p) \neq 0$ d'où

$$d(x, F)^2 = \frac{G(u_1, \dots, u_p, x)}{G(u_1, \dots, u_p)}.$$

Partie II : Familles obtusangles

1. • On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, $\|u_i - u_j\| = \alpha$.
Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a

$$\alpha^2 = \|u_i - u_j\|^2 = \|u_i\|^2 - 2\langle u_i, u_j \rangle + \|u_j\|^2 = 2 - 2\langle u_i, u_j \rangle$$

d'où $\langle u_i, u_j \rangle = \lambda$ avec $\lambda = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

• On suppose qu'il existe un réel λ tel que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $\langle u_i, u_j \rangle = \lambda$.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a alors

$$\|u_i - u_j\|^2 = \|u_i\|^2 - 2\langle u_i, u_j \rangle + \|u_j\|^2 = 2 - 2\lambda = 2(1 - \lambda)$$

donc $\|u_i - u_j\| = \alpha$ avec $\alpha = \sqrt{2(1 - \lambda)}$ (notons qu'on a nécessairement $2(1 - \lambda) \geq 0$).

Les deux conditions sont donc bien équivalentes.

2. D'après la question précédente, on a $\lambda = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ avec $\alpha > 0$ donc $\lambda < 1$.

Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$0 \leq \alpha = \|u_i - u_j\| \leq \|u_i\| + \|u_j\| = 2$$

donc $\alpha^2 \leq 4$ d'où $\lambda = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \geq 1 - \frac{4}{2} = -1$. On a donc bien $-1 \leq \lambda < 1$.

Puisque pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2 = 1$ et que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec

$i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = \lambda$, on a $G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ \lambda & \dots & \lambda & 1 \end{vmatrix}$. En effectuant l'opération,

$L_1 \leftarrow L_1 + \dots + L_p$, on obtient

$$G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} 1 + (p-1)\lambda & 1 + (p-1)\lambda & \dots & 1 + (p-1)\lambda & 1 + (p-1)\lambda \\ \lambda & 1 & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda \\ \lambda & \dots & \dots & \lambda & 1 \end{vmatrix}$$

d'où $G(u_1, \dots, u_p) = (1 + (p-1)\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda \\ \lambda & \dots & \dots & \lambda & 1 \end{vmatrix}$. Puis, pour tout $i \in \llbracket 2, p \rrbracket$, on

effectue l'opération $C_i \leftarrow C_i - C_1$ et on obtient

$$G(u_1, \dots, u_p) = (1 + (p-1)\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda & 0 & \dots & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + (p-1)\lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la première colonne, d'où $G(u_1, \dots, u_p) = (1 + (p-1)\lambda)(1 - \lambda)^{p-1}$.

Notons que le résultat est également vrai pour $p = 1$, puisque $G(u_1) = \|u_1\|^2 = 1$.

3. Supposons que la famille (u_1, \dots, u_p) est libre. Puisque $\dim(E) = n$ et que le cardinal d'une famille libre est nécessairement inférieur à la dimension, cela implique que $p \leq n$.

Par ailleurs, d'après les résultats de la première partie, on en déduit que $G(u_1, \dots, u_p) > 0$ et d'après la question précédente, ceci implique que $(1 + (p-1)\lambda)(1 - \lambda)^{p-1} > 0$. Puisque $1 - \lambda > 0$ d'après la question précédente, on a nécessairement $1 + (p-1)\lambda > 0$ d'où

$$-\frac{1}{p-1} < \lambda < 1.$$

Toute base orthonormée de E est une famille libre et obtusangle de cardinal n .

4. (a) Puisque la famille (u_1, \dots, u_p) est liée, on a $G(u_1, \dots, u_p) = 0$, i.e.

$$(1 + (p-1)\lambda)(1 - \lambda)^{p-1} = 0$$

d'après la question 2. Or, d'après la même question $1 - \lambda \neq 0$ donc on a nécessairement

$$1 + (p-1)\lambda = 0 \text{ d'où } \lambda = -\frac{1}{p-1}.$$

- (b) Montrons que la famille (u_1, \dots, u_{p-1}) est libre.

En refaisant les mêmes calculs que précédemment, on a

$$G(u_1, \dots, u_{p-1}) = (1 + (p-2)\lambda)(1 - \lambda)^{p-2}.$$

Or, $1 - \lambda > 0$ et d'après la question précédente, $1 + (p-2)\lambda = 1 - \frac{p-2}{p-1} = \frac{1}{p-1}$ d'où $G(u_1, \dots, u_{p-1}) > 0$.

D'après la première partie, on en déduit que la famille (u_1, \dots, u_{p-1}) est libre. Puisque la famille (u_1, \dots, u_p) est liée, ceci implique que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$ et que ce sous-espace vectoriel est de dimension $p-1$ donc $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p-1$.

Puisque le cardinal d'une famille libre est nécessairement inférieur à la dimension de l'espace, on a $p-1 \leq n$ d'où $p \leq n+1$.

- (c) On a montré en question précédente que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$ donc $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$. Ainsi, il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tels que

$$u_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k.$$

En prenant le produit scalaire de u_p avec lui-même, on a

$$1 = \langle u_p, u_p \rangle = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \langle u_k, u_p \rangle = \lambda \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k$$

$$\text{d'où } \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k = \frac{1}{\lambda} = -(p-1).$$

Par ailleurs pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a

$$\lambda = \langle u_p, u_i \rangle = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \langle u_k, u_i \rangle = \lambda_i \|u_i\|^2 + \lambda \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p-1} \lambda_k = \lambda_i + \lambda \left(\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k - \lambda_i \right) = \lambda_i(1-\lambda) - (p-1)\lambda$$

d'où $\lambda_i(1-\lambda) = p\lambda$ i.e. $\lambda_i \frac{p}{p-1} = -\frac{p}{p-1}$, puis $\lambda_i = -1$, et ce pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

$$\text{Ainsi, } u_p = - \sum_{k=1}^{p-1} u_k \text{ d'où } \boxed{\sum_{k=1}^p u_k = 0_E.}$$

5. (a) Il suffit de choisir un vecteur u_1 de norme 1 et de prendre $u_2 = -u_1$.
 (b) D'après la question 4.b), si la famille (u_1, \dots, u_p) est liée et obtusangle, alors $\dim(F) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = p-1 \leq n-1$. Puisque E est de dimension finie, on a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = n - (p-1) = n-p+1 \geq 1$ donc il existe un vecteur non nul dans F^\perp , et quitte à le diviser par sa norme, on trouve bien un vecteur $v_{p+1} \in F^\perp$ tel que $\|v_{p+1}\| = 1$.

Tout d'abord, puisque la famille (u_1, \dots, u_p) est liée et obtusangle, on sait d'après la question 4.(c) que $\sum_{k=1}^p u_k = 0_E$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} v_k &= \sum_{k=1}^p v_k + v_{p+1} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(-\frac{1}{p} v_{p+1} + \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}} u_k \right) + v_{p+1} \\ &= -v_{p+1} + \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}} \sum_{k=1}^p u_k + v_{p+1} \\ &= 0_E, \end{aligned}$$

ce qui prouve en particulier que la famille (v_1, \dots, v_{p+1}) est liée.

Montrons maintenant que la famille (v_1, \dots, v_{p+1}) est obtusangle.

Puisque la famille (u_1, \dots, u_p) est obtusangle, on a $\|u_k\| = 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et puisqu'elle est liée, on sait d'après la question 4.a) que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a $\langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{p-1}$.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Puisque $v_{p+1} \in F^\perp$, on a $\langle v_{p+1}, u_k \rangle = 0$ donc d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|v_k\|^2 = \frac{1}{p^2} \underbrace{\|v_{p+1}\|^2}_{=1} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \underbrace{\|u_k\|^2}_{=1} = 1$$

donc pour tout $k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$, $\|v_k\| = 1$.

Ensuite, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\langle v_{p+1}, v_k \rangle = -\frac{1}{p} \underbrace{\|v_{p+1}\|^2}_{=1} + \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}} \underbrace{\langle v_{p+1}, u_k \rangle}_{=0} = -\frac{1}{p}$$

et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a

$$\langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{p^2} \underbrace{\|v_{p+1}\|^2}_{=1} - \frac{1}{p} \left(\underbrace{\langle v_{p+1}, u_i \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v_{p+1}, u_j \rangle}_{=0} \right) + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=-\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{p^2} - \frac{p^2 - 1}{p^2(p-1)} = -\frac{1}{p}.$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a $\langle v_i, v_j \rangle = -\frac{1}{p}$, ce qui achève de prouver que la famille (v_1, \dots, v_{p+1}) est liée et obtusangle.

- (c) On a vu comment construire une famille liée et obtusangle à deux vecteurs. Ensuite, pour tout $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a vu comment construire une famille liée et obtusangle à $p+1$ vecteurs à partir d'une famille liée et obtusangle à p vecteurs.

En partant d'une famille liée et obtusangle à deux vecteurs et en itérant le procédé vu à la question précédente, on parvient finalement à construire une famille liée et obtusangle à $(n+1)$ vecteurs dans E .

Problème 2 : Autour de la série harmonique

1. (a) Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

d'où $u_n - u_{n-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit par comparaison que

$\text{la série } \sum_{n \geq 2} (u_n - u_{n-1}) \text{ est convergente.}$

- (b) D'après le lien suite-série, la série $\sum_{n \geq 2} u_n - u_{n-1}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont la même nature. D'après la question précédente, on peut affirmer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Partie I : Somme d'une série alternée

2. (a) La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a

$$\forall t > 0, h'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}.$$

On a donc le tableau de variation suivant :

t	0	e	$+\infty$
$h'(t)$		+	-
h	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

(b) La fonction h est décroissante sur $[e, +\infty[$ et donc sur $[3, +\infty[$. Ainsi,

$$\forall n \geq 3, \forall t \in [n, n+1], \frac{\ln(t)}{t} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

et

$$\forall n \geq 4, \forall t \in [n-1, n], \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{\ln(t)}{t}.$$

En intégrant ces inégalités respectivement sur $[n, n+1]$ et $[n-1, n]$, on obtient les inégalités demandées.

(c) La suite $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n \geq 3}$ est positive, décroissante et de limite nulle. D'après le théorème

spécial des séries alternées, on en déduit que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente.

En revanche, elle n'est pas absolument convergente car pour $n \geq 3$, on a $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs (avec la série harmonique divergente), on en déduit que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente donc

la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ n'est pas absolument convergente.

3. On a pour tout $n \geq 3$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2} ((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2).$$

D'après la seconde inégalité de la question 2.b, on a pour tout $n \geq 3$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2} ((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2),$$

d'où

$$\forall n \geq 3, a_{n+1} - a_n \leq 0$$

et la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

En utilisant cette fois la première inégalité de 2.b et en sommant pour k allant de 3 à n , on a

$$t_n = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt = \ln(2) + \frac{1}{2} ((\ln(n))^2 - (\ln(3))^2)$$

d'où

$$\forall n \geq 3, a_n \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$$

La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

4. Soit $n \geq 3$. On sépare dans S_{2n} les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}.$$

Dans la seconde somme, on ajoute les termes pairs :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - t_{2n}.$$

En scindant la première somme, on a donc

$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \ln(2).$$

En remplaçant par les expressions des suites (a_n) et (u_n) , on obtient

$$S_{2n} = (u_n + \ln(n)) \ln(2) + a_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}.$$

En écrivant que

$$\frac{(\ln(2n))^2}{2} = \frac{(\ln(n) + \ln(2))^2}{2} = \frac{(\ln(n))^2}{2} + \ln(n) \ln(2) + \frac{(\ln(2))^2}{2},$$

on a donc

$$S_{2n} = u_n \ln(2) + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

5. Puisque la suite (a_n) est convergente, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_{2n} = 0$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

Puisque (S_{2n}) est une suite extraite de la suite convergente (d'après 2.c)) (S_n) , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2},$$

donc

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

Partie II : Développement asymptotique de la série harmonique

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On procède à des intégrations par parties successives. On a

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2} \right)^2 f''(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\left(t - k - \frac{1}{2} \right)^2 f'(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} 2 \left(t - k - \frac{1}{2} \right) f'(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f'(k+1) - f'(k)}{4} - \left[2 \left(t - k - \frac{1}{2} \right) f(t) \right]_k^{k+1} + 2 \int_k^{k+1} f(t) dt \right) \\ &= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt. \end{aligned}$$

(b) Si $n = 1$, le résultat de la question est trivial. Supposons $n > 1$. Sommons le résultat de la question précédente pour k allant de 1 à $n - 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} J_k &= \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \right) + \int_1^n f(t) dt \\ &= \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^n f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \right) + \int_1^n f(t) dt \\ &= \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \sum_{k=2}^{n-1} f(k) - \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(t) dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k) = \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$$

En ajoutant $f(1) + f(n)$ de chaque côté, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.}$$

2. (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , on peut donc lui appliquer les résultats des questions précédentes. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $J_k = \int_k^{k+1} \frac{(t - k - \frac{1}{2})^2}{t^3} dt$. On a clairement $J_k \geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive.

D'autre part, pour $t \in \llbracket k, k+1 \rrbracket$, on a $-\frac{1}{2} \leq t - k - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $(t - k - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$.

Ainsi, on a $\boxed{0 \leq J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt.}$

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt = \left[-\frac{1}{8t^2} \right]_k^{k+1} = \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k+1)^2}$. D'après la question précédente, on en déduit que $J_k \leq \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k+1)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant pour k allant de 1 à n , on trouve

$$0 \leq \sum_{k=1}^n J_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k+1)^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8(n+1)^2} \leq \frac{1}{8}.$$

Ainsi la série de terme général J_k est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée.

$\boxed{\text{On en déduit que la série de terme général } J_k \text{ est convergente.}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$0 \leq \sum_{k=n}^{n+p} J_k \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k+1)^2} = \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{8(n+p)^2}.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ (ce qui est possible car on a montré que la série était convergente), on obtient

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}.$$

(d) En appliquant le résultat de la question 1.b) à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \frac{-\frac{1}{n^2} + 1}{8} + \int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=1}^{n-1} J_k,$$

d'où

$$H_n = \frac{5}{8} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$$

Ainsi,

$$H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8n^2} - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve

$$\gamma = \frac{5}{8} - \sum_{k=1}^{+\infty} J_k,$$

d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} J_k = \frac{5}{8} - \gamma$, ou encore pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} J_k = \frac{5}{8} - \gamma - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n} = \frac{5}{8} - \gamma - \frac{1}{8n^2} - \sum_{k=1}^{n-1} J_k = \sum_{k=n}^{+\infty} J_k - \frac{1}{8n^2}.$$

On a clairement $-\frac{1}{8n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'autre part, d'après la question précédente, on a $0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n}$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} J_k = 0$, d'où $\sum_{k=n}^{+\infty} J_k = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a donc bien $\sum_{k=n}^{+\infty} J_k - \frac{1}{8n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc finalement

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$