Lycée Fénelon | PCSI
Année 2025-2026 | A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°9
Samedi 6 juin 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, de deux problèmes et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Matrices de Gram et familles obtusangles

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note également $\|.\|$ la norme euclidienne issue de ce produit scalaire.
Lorsque $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille finie de vecteurs de E (le nombre de vecteurs n'est pas nécessairement égal à la dimension de l'espace), on appelle <u>déterminant de Gram</u> de cette famille le réel suivant :

$$G(u_1, \dots, u_p) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_p, u_1 \rangle & \langle u_p, u_2 \rangle & \dots & \langle u_p, u_p \rangle \end{vmatrix} = \det\left((\langle u_i, u_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \right).$$

On appelle également <u>matrice de Gram</u> la matrice $M(u_1, \dots, u_p) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$, de sorte que $G(u_1, \dots, u_p) = \det(M(u_1, \dots, u_p))$.

Partie I : Matrices et déterminants de Gram

1. <u>Exemples</u>
   (a) Si u est un vecteur quelconque de E, préciser $G(u)$.
   (b) Si u et v sont deux vecteurs de E, expliciter $G(u, v)$.
   Montrer ensuite que $G(u, v) \geqslant 0$ en précisant le cas d'égalité.
   (c) Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille telle que $\langle u_1, u_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![2, p]\!]$.
   Montrer qu'alors $G(u_1, u_2, \dots, u_p) = \|u_1\|^2 \, G(u_2, \dots, u_p)$.
   Quel est le déterminant de Gram d'une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ orthogonale ?
2. <u>Cas $p = n$</u>
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ (c'est à dire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de A est la matrice colonne des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$).
   (a) Vérifier que $M(u_1, \dots, u_n) = A^T A$.
   (b) En déduire que $G(u_1, \dots, u_n) \geqslant 0$ et que $G(u_1, \dots, u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée.
3. <u>Cas général</u> Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E (avec $p \geqslant 2$).
   Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$.
   (a) Justifier qu'il existe un unique couple de vecteurs $(a, b) \in F \times F^{\perp}$ tel que $u_p = a + b$.
   (b) Montrer que $G(u_1, \dots, u_p) = G(u_1, \dots, u_{p-1}) \|b\|^2$.
   (c) En déduire que $G(u_1, \dots, u_p) \geqslant 0$ et que $G(u_1, \dots, u_p) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de F.
   Soit x un vecteur de E. Montrer que la distance de x à F vérifie :
   $$d(x, F)^2 = \frac{G(u_1, u_2, \dots, u_p, x)}{G(u_1, u_2, \dots, u_p)}.$$

Partie II : Familles obtusangles

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $(u_1, \dots, u_p)$ des vecteurs deux à deux distincts de E.
On dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *obtusangle* si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\|u_i\| = 1$ et si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
• il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\|u_i - u_j\| = \alpha$ (autrement dit, les vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ sont équidistants) ;
• il existe un réel λ tel que, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = \lambda$.

1. Montrer que les deux conditions ci-dessus sont équivalentes.

Dans toute la suite, on suppose que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est obtusangle.

2. On note λ la valeur commune des produits scalaires $\langle u_i, u_j \rangle$ pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]$ avec $i \neq j$. Montrer que $-1 \leqslant \lambda < 1$ et que $G(u_1, \dots, u_p) = (1 + (p-1)\lambda)(1 - \lambda)^{p-1}$.
3. En déduire que si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$ et $-\dfrac{1}{p-1} < \lambda < 1$. Proposer une famille libre et obtusangle de cardinal n.
4. On suppose dans cette question uniquement que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.
   (a) Montrer que $\lambda = -\dfrac{1}{p-1}$.
   (b) Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est de rang $p-1$ et en déduire que $p \leqslant n+1$.
   (c) Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k = 0_E$.
5. On vient de montrer qu'une famille liée et obtusangle contient au maximum $n+1$ vecteurs. Le but de cette question est de créer la plus grande famille liée et obtusangle possible, c'est à dire une famille liée et obtusangle $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ de vecteurs de E.
   (a) Expliquer comment choisir u_1 et u_2 pour que la famille (u_1, u_2) soit liée et obtusangle.
   (b) Soit $p \in [\![2, n]\!]$.
   On suppose qu'on a construit une famille $(u_1, \dots, u_p)$ liée et obtusangle.
   Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
   Après avoir justifié l'existence d'un vecteur $v_{p+1} \in F^\perp$ de norme 1, on pose pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $v_k = -\dfrac{1}{p} v_{p+1} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{p^2}}\, u_k$.
   Montrer alors que la famille $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1})$ est liée et obtusangle.
   (c) Conclure.

Problème 2 : Autour de la série harmonique

1. Pour tout $n \geqslant 1, n$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

   (a) Montrer que $u_n - u_{n-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge, vers un réel qu'on notera γ.

Partie I : Somme d'une série alternée

2. On considère l'application

$$h : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln(t)}{t} \end{array}.$$

   (a) Déterminer le tableau de variation de h.

   (b) Justifier les inégalités :

$$\forall n \geqslant 3, \int_{n}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4, \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

   (c) Prouver que la série $\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

Le but de cette partie est de calculer

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}.$$

Pour cela, pour tout $n \geqslant 3$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}, t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{et} \quad a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}.$$

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante puis justifier qu'elle converge.

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3, S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln(2)$. En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.

5. Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_{2n}$ (on exprimera la limite en fonction de γ et $\ln(2)$), puis déterminer S.

Partie II : Développement asymptotique de la série harmonique

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$J_k = \frac{1}{2} \int_{k}^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) dt.$$

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$$

2. On suppose dans cette question que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant J_k \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt$.

(b) En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

(c) En déduire également que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$.

(d) Montrer que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$