

## Fonctions réelles de deux variables réelles

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme euclidienne définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dans tout le chapitre, on considère des fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 27.1 Fonctions continues

#### 27.1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

##### Définition 1: Boules

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , soit  $r$  un réel strictement positif.

- On appelle boule ouverte de centre  $(a, b)$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B((a, b), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(a, b) - (x, y)\| < r\}.$$

- On appelle boule fermée de centre  $(a, b)$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$\overline{B}((a, b), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(a, b) - (x, y)\| \leq r\}.$$

##### Définition 2: Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$ . On dit que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  si pour tout  $(a, b) \in U$ , il existe un réel strictement positif tel que la boule ouverte  $B((a, b), r)$  soit incluse dans  $U$ .

On dit aussi que  $U$  est voisinage de chacun de ses points.

**Remarque 1.** Autrement dit, si  $U$  est un ouvert et que  $(a, b) \in U$ , pour un couple  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  de norme suffisamment petite, on a  $(a + h, b + k) \in U$ .

#### 27.1.2 Fonctions continues

##### Définition 3: Continuité

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  est continue en  $(a, b)$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in B((a, b), r), |f(x, y) - f(a, b)| \leq \varepsilon.$$

- On dit que  $f$  est continue sur  $U$  si  $f$  est continue en tout point  $(a, b)$  de l'ouvert  $U$ .

**Remarque 2.** On peut montrer que  $f$  est continue en  $(a, b)$  si et seulement si pour tout couple de suites réelles  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n, b_n) = f(a, b).$$

En utilisant les résultats sur les suites, on montre que toute combinaison linéaire, produit, quotient, composée d'applications continues est continue.

**Exemple 1.** • Toutes les fonctions polynomiales en les deux variables  $(x, y)$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ . Par exemple, la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^3 y^2 + 2xy - x + 4$$

est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

- La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Considérons les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ . On a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f(a_n, b_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n, b_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$ , ce qui prouve que la fonction  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

En revanche, elle est continue en tout point  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

### 27.1.3 Surface représentative et courbes de niveau

#### Définition 4: Surface représentative

Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables réelles. On appelle surface représentative de  $f$  la surface

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U \text{ et } z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

#### Définition 5: Lignes de niveau

Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables réelles. Soit  $k \in \mathbb{R}$ . On appelle ligne (ou courbe) de niveau  $k$  de  $f$  l'ensemble

$$\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = k\}.$$

**Remarque 3.** Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}_k \times \{k\}$  est l'intersection de  $\mathcal{S}_f$  avec le plan d'équation  $z = k$ .

## 27.2 Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

### 27.2.1 Fonctions partielles

#### Définition 6: Fonctions partielles

Soit  $U$  un ouvert inclus dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit

$$f : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{array}$$

une fonction de deux variables réelles.

Pour tout  $(x_0, y_0) \in U$ , on appelle première fonction partielle en  $(x_0, y_0)$  la fonction

$$f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$$

et deuxième fonction partielle en  $(x_0, y_0)$  la fonction

$$f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y).$$

**Remarque 4.** • La courbe de la première fonction partielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  s'obtient en intersectant la surface représentative de la fonction  $f$  avec le plan d'équation  $y = y_0$ .

• La courbe de la deuxième fonction partielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  s'obtient en intersectant la surface représentative de la fonction  $f$  avec le plan d'équation  $x = x_0$ .

### 27.2.2 Dérivées partielles et gradient

#### Définition 7: Dérivées partielles

Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Soit  $f : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{array}$  une fonction de deux variables réelles.

Pour tout  $(x_0, y_0) \in U$ , on considère les fonctions partielles  $f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$  et  $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$ .

• On dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en  $(x_0, y_0)$  si la première fonction partielle  $f_{y_0}$  est dérivable en  $x_0$  et dans ce cas, on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0).$$

• On dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en  $(x_0, y_0)$  si la deuxième fonction partielle  $f_{x_0}$  est dérivable en  $y_0$  et dans ce cas, on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0).$$

**Remarque 5.** • Supposons que  $f$  admette des dérivées partielles en un point  $(x_0, y_0)$ . On a alors par définition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

• Pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  en un point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on dérive  $f(x, y)$  par rapport à  $x$  en traitant  $y$  comme une constante.

• Pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  en un point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on dérive  $f(x, y)$  par rapport à  $y$  en traitant  $x$  comme une constante.

**Exemple 2.** Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2y^3 + 3yx - x$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $f'_y(x) = 2xy^3 + 3y - 1$  et  $f'_x(y) = 3x^2y^2 + 3x$ .

Ainsi, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + 3y - 1$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + 3x$ .

En particulier, on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = -6$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 6$ .

### Définition 8: Gradient

Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in U$  tel que la fonction  $f$  admette des dérivées partielles au point  $(x_0, y_0)$ .

On appelle gradient de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  suivant :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

## 27.2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

### Définition 9

Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si  $f$  admet des dérivées partielles continues en tout point de  $U$ .

**Exemple 3.** La fonction  $f$  de l'exemple précédent est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Remarque 6.** L'existence des dérivées partielles d'une fonction  $f$  ne garantit pas la continuité de ces dérivées partielles, ni même la continuité de  $f$  !

**Exemple 4.** On a déjà vu que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Pourtant, elle admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0(x_0^2 + y_0^2) - 2x_0^2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{y_0^3 - x_0^2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0(x_0^2 + y_0^2) - 2y_0^2x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{x_0^3 - x_0y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$

En  $(0, 0)$ , les fonctions  $t \mapsto f(t, 0)$  et  $t \mapsto f(0, t)$  sont nulles : elles sont donc de classe  $\mathcal{C}^1$  et dérivée nulle.

Ainsi,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

On en déduit que pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , les fonctions  $t \mapsto f(t, y_0)$  et  $f(x_0, t)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Mais  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  puisque ses dérivées partielles ne sont pas continues en  $(0,0)$ .

En effet, le vecteur  $(t, 2t)$  tend vers  $(0,0)$  quand  $t$  tend vers 0.

Or, pour tout  $t > 0$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, 2t) = \frac{6t^3}{25t^4} = \frac{6}{25t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, 2t) = \frac{-3t^3}{25t^4} = -\frac{3}{25t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -\infty \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

### Proposition 1: Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $(x_0, y_0) \in U$ . Pour tout couple  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$ , on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|).$$

*Démonstration.* Admise. □

**Remarque 7.** • Ceci signifie que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

En fait, on approxime localement en  $(x_0, y_0)$  la différence  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  par l'application linéaire

$$(h, k) \mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle.$$

• En posant  $x = x_0 + h, y = y_0 + k, z_0 = f(x_0, y_0)$  et  $z = f(x, y)$ , on obtient

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Le plan tangent en  $(x_0, y_0)$  à la surface d'équation  $z = f(x, y)$  est alors défini par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

En effet, c'est le plan de vecteur normal  $\nabla f(x_0, y_0)$  et passant par  $(x_0, y_0, z_0)$ .

## 27.2.4 Dérivées partielles et composées

### Définition 10: Dérivée selon un vecteur

Soit  $U$  un ouvert inclus dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Soit  $(x_0, y_0) \in U$ . Soit  $u = (h, k)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .

On appelle dérivée de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  selon le vecteur  $u$  la limite suivante (si elle existe) :

$$D_u(f)(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

**Remarque 8.** • Notons que si  $u = (1, 0)$ , alors  $D_u(f)(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et si  $u = (0, 1)$ , alors  $D_u(f)(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

• Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , à l'aide du développement limité à l'ordre 1 de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ , on retrouve

$$D_u(f)(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle.$$

### Proposition 2: Règle de la chaîne

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soient  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .  
Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . On suppose que pour tout  $t \in I$ ,  $(x(t), y(t)) \in U$ .  
Alors la fonction  $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et pour tout  $t \in I$ , on a

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

**Remarque 9.** Si on note pour tout  $t \in I$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , ceci s'interprète comme la dérivée de  $f$  le long de l'arc  $\gamma$  et on a

$$\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

où  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ .

*Démonstration.* Soit  $t \in I$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables en  $t$  donc il existe des fonctions  $\eta$  et  $\delta$ , avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$ , vérifiant pour  $h$  proche de 0,

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + h\eta(h) \quad \text{et} \quad y(t+h) = y(t) + y'(t)h + h\delta(h).$$

De même, soit  $a = (x(t), y(t))$ . Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , il existe une fonction  $\varepsilon$ , avec  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$  telle que pour  $(h,k)$  proche de  $(0,0)$ ,

$$f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k).$$

Pour  $(H, K) = (x'(t)h + h\eta(h), y'(t)h + h\delta(h))$ , on a bien  $(H, K)$  qui tend vers  $(0, 0)$  lorsque  $h$  tend vers 0 et il vient

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\ &= f(x(t) + x'(t)h + h\eta(h), y(t) + y'(t)h + h\delta(h)) \\ &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x'(t)h + h\eta(h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y'(t)h + h\delta(h)) + \|(H, K)\|\varepsilon((H, K)) \\ &= g(t) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)y'(t) \right) h + \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x}(a)\eta(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\delta(h) \right) h + \|(H, K)\|\varepsilon((H, K))}_{=o(h)} \end{aligned}$$

donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)y'(t)$ , ce qui prouve que  $g$  est dérivable et que pour tout  $t \in I$ ,  $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$ . Puisque  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et que les dérivées partielles de  $f$  sont continues, on en conclut que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .  $\square$

**Exemple 5.** Soient  $x : t \mapsto \cos(t)$  et  $y : t \mapsto \sin(t)$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2y + 3xy - y$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 3x - 1.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(t) = f(x(t), y(t))$ . D'après la règle de la chaîne,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout réel  $t$  :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -2\cos(t)\sin^2(t) - 3\sin^2(t) + \cos^3(t) + 3\cos^2(t) - \cos(t). \end{aligned}$$

### Corollaire 1

Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , soient  $x$  et  $y$  deux fonctions définies sur  $V$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que pour tout  $(u, v) \in V$ ,  $(x(u, v), y(u, v)) \in U$ .

Alors l'application

$$g : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$  et pour tout  $(u, v) \in V$ , on a

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v). \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $(u, v) \in V$ .

Considérons  $h : t \mapsto g(t, v) = f(x_1(t), y_1(t))$ , où  $x_1(t) = x(t, v)$  et  $y_1(t) = y(t, v)$ .

Alors d'après la règle de la chaîne,  $h$  est dérivable en  $u$  et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= h'(u) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_1(u), y_1(u))x_1'(u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1(u), y_1(u))y_1'(u) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v). \end{aligned}$$

On procède de la même manière, cette fois en fixant  $u$ , pour montrer l'autre formule.  $\square$

**Exemple 6.** Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $r \in \mathbb{R}^+$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

Les coordonnées  $(r, \theta)$  sont des coordonnées dites polaires de  $x$  et  $y$ .

Pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ , on pose

$$x(r, \theta) = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y(r, \theta) = r \sin(\theta).$$

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On définit pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \sin(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \cos(\theta). \end{cases}$$

## 27.3 Applications géométriques

### 27.3.1 Extrema et points critiques

#### Définition 11: Extrema

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

- On dit que  $(x_0, y_0)$  est un minimum local de  $f$  s'il existe un ouvert  $V \subset U$  tel que

$$\forall (x, y) \in V, f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

- On dit que  $(x_0, y_0)$  est un maximum local de  $f$  s'il existe un ouvert  $V \subset U$  tel que

$$\forall (x, y) \in V, f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- On dit que  $(x_0, y_0)$  est un extremum local de  $f$  si  $(x_0, y_0)$  est un maximum ou un minimum local de  $f$  sur  $U$ .
- On dit que  $(x_0, y_0)$  est un extremum global sur  $U$  si dans les définitions précédentes, on peut prendre  $V = U$ .

#### Définition 12: Point critique

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $U$ .

Soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

On dit que  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$  si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

**Remarque 10.** • De façon équivalente,  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$  si  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

- Si  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , on dit que  $(x_0, y_0)$  est un point régulier de  $f$ .

#### Théorème 1: Condition nécessaire d'extrémalité

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Soit  $(x_0, y_0)$  un extremum local de  $f$  sur  $U$ .

Alors  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$ .

*Démonstration.* Supposons que  $f$  admette un minimum local en  $(x_0, y_0)$ .

Alors il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$ ,  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ .

Soit  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour tout réel  $t$  tel que  $|t| < r$ , on a pour tout  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ ,  $\|te_i\| < t$  donc  $f((x_0, y_0) + te_i) \geq f(x_0, y_0)$ . Ainsi,  $\frac{f((x_0, y_0) + te_i) - f(x_0, y_0)}{t} \geq 0$  si  $t > 0$  et  $\frac{f((x_0, y_0) + te_i) - f(x_0, y_0)}{h} \leq 0$  si  $t < 0$ .

En faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + te_i) - f(x_0, y_0)}{t} = 0,$$

et ceci pour tout  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  donc  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ .

On effectue la même preuve mutatis mutandis dans le cas d'un maximum local.  $\square$

**Exemple 7.** Soit  $U = ]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[ \times ]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ . Soit  $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  définie sur le pavé ouvert  $U$ .

Pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $f(x, y) \leq 1 = f(0, 0)$  donc  $(0, 0)$  est un maximum de  $f$  sur  $U$ . D'après le théorème précédent,  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$ .

En effet, on a pour tout  $(x, y) \in U$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\text{donc} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

**Remarque 11.** • C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

En effet, soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ . La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Le seul point critique de  $f$  est alors  $(x, y) = (0, 0)$  mais ce n'est pas un extremum de  $f$  car  $f(0, 0) = 0$  mais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(0, y) = -\infty.$$

Le point  $(0, 0)$  n'est même pas un extremum local de  $f$  car on peut trouver des points arbitrairement proches de 0 qui ont des images de signes opposés.

• Le résultat n'est plus forcément vrai si on n'est pas sur un ouvert.

Soit  $U = [0, 1] \times [0, 1]$ . Soit  $f$  définie sur  $U$  par  $f(x, y) = x + y$ .

Alors le point  $(0, 0)$  est un minimum de  $f$  mais  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$ .

**Remarque 12.** Si  $(x_0, y_0)$  est situé sur la courbe de niveau  $k$ , alors le gradient  $\nabla f(x_0, y_0)$  est orthogonal à la ligne de niveau  $k$  et orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $f$ .

### 27.3.2 Compléments sur le gradient

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe définie par  $f(x, y) = 0$ . On suppose que  $f$  admet un point régulier  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ .

On peut montrer qu'il existe  $r > 0$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $\gamma : I \rightarrow B((x_0, y_0), r)$  un arc de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$  tels que pour tout  $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$ , on a l'équivalence

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists t \in I, (x, y) = \gamma(t).$$

On dit que l'arc paramétré  $(I, \gamma)$  est un paramétrage local de  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

Si pour tout  $t \in I$ , on note  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , alors on a pour tout  $t \in I$ ,  $f(x(t), y(t)) = 0$ . D'après la règle de la chaîne, ceci implique que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

d'où  $\nabla f(\gamma(t))$  est orthogonal à  $\gamma'(t)$ .

Pour  $t = 0$ , ceci implique que  $\nabla f(x_0, y_0)$  est orthogonal à  $\gamma'(0)$ .

Or, on sait que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $(x_0, y_0)$  est la droite passant par  $(x_0, y_0)$  et dirigée par  $\gamma'(0)$ .

On en déduit la définition suivante.

**Définition 13: Tangente à une courbe**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}$  la courbe définie par l'équation  $f(x, y) = 0$ .

Soit  $(x_0, y_0)$  un point régulier de  $\mathcal{C}$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  possède une tangente en  $(x_0, y_0)$  d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

**Remarque 13.** Ceci signifie que  $\nabla f(x_0, y_0)$  est orthogonal à  $\mathcal{C}$  au point  $(x_0, y_0)$ .

Ainsi, la tangente est horizontale si  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  et verticale si  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

**Exemple 8.** Considérons la courbe de  $\mathbb{R}^2$  définie par l'équation

$$x^3 + 3y^2 + 6xy + 4 = 0.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  est donc définie par l'équation  $f(x, y) = 0$  où  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 4$ .

C'est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  car polynomiale et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6y + 6x.$$

On cherche les points critiques de  $f$  :

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

Les points critiques de  $f$  sont donc  $(0, 0)$  et  $(2, -2)$ .

Vu l'équation, on constate que  $(0, 0)$  n'appartient pas à la courbe, et que  $(2, -2)$  appartient à la courbe. Ce dernier en est donc le seul point critique.

Ainsi, pour tout point de la courbe  $\mathcal{C}(x_0, y_0) \neq (2, -2)$ ,  $(x_0, y_0)$  est un point régulier de la courbe et l'équation de la tangente à la courbe en ce point est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

i.e.

$$(x_0^2 + 2y_0)(x - x_0) + (2x_0 + 2y_0)(y - y_0) = 0.$$

**Remarque 14.** Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Son graphe  $\mathcal{C}$  est la courbe d'équation  $f(x, y) = 0$  où  $f(x, y) = g(x) - y$ .

Ainsi,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \times \mathbb{R}$  et pour tout  $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ , on a

$$\nabla f(x, y) = (g'(x), -1) \neq (0, 0)$$

donc tout point de cette courbe est régulier et la tangente en un point  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  a pour équation

$$g'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$$

i.e.

$$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0).$$

On retrouve l'équation de la tangente en un point connue depuis fort longtemps.

**Proposition 3**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Soit  $(x_0, y_0)$  un point régulier de la ligne de niveau  $\lambda$  de  $f$ .

Alors  $\nabla f(x_0, y_0)$  est orthogonal à la ligne de niveau  $\lambda$  de  $f$  et orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $f$ , i.e. il existe  $\eta > 0$  tel que la fonction

$$t \mapsto f((x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0))$$

est strictement croissante sur  $] - \eta, \eta[$ .

*Démonstration.* Soit  $g : (x, y) \mapsto f(x, y) - \lambda$ .

Alors la ligne de niveau  $\lambda$  de  $f$  est la courbe  $\mathcal{C}$  du plan définie par l'équation  $g(x, y) = 0$ .

Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ ,  $g$  l'est également et on a pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $\nabla g(x, y) = \nabla f(x, y)$ .

Or, on a déjà vu que  $\nabla g(x_0, y_0)$  est orthogonal à  $\mathcal{C}$  en  $(x_0, y_0)$  ce qui assure que  $\nabla f(x_0, y_0)$  est orthogonal à la ligne de niveau  $\lambda$  de  $f$ .

D'autre part, considérons les fonctions

$$x : t \mapsto x_0 + t \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad y : t \mapsto y_0 + t \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On peut donc définir au voisinage de 0 la fonction

$$h : t \mapsto f(x(t), y(t)).$$

D'après la règle de la chaîne,  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de 0 et on a pour  $t$  assez proche de 0 :

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Pour  $t = 0$ , on obtient  $h'(0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2 > 0$  car  $(x_0, y_0)$  est un point régulier de  $f$ .

Par continuité de  $h'$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t \in ] - \eta, \eta[$ ,  $h'(t) > 0$ , ce qui implique que  $h$  est strictement croissante sur  $] - \eta, \eta[$  d'où le résultat.  $\square$

## 27.4 Dérivées partielles d'ordre deux

### 27.4.1 Dérivées partielles d'ordre deux

#### Définition 14: Dérivées partielles d'ordre deux

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et si les dérivées partielles

$\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Dans ce cas, on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Ces fonctions sont les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ .

### 27.4.2 Théorème de Schwarz

#### Théorème 2: Théorème de Schwarz

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .

Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Démonstration.* Démonstration hors-programme. □

**Exemple 9.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^3y + y^2 + xy^4$ .

Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  car polynomiale et on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 2y + 4xy^3,$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3x^2 + 4y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

On a également pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 12xy^2.$$

**Remarque 15.** Pour montrer qu'une fonction n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ , il suffit donc de montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

**Exemple 10.** Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x, 0) - f(0, 0) = 0$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$ .

De même, puisque pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a  $f(0, y) - f(0, 0) = 0$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$ .

Par ailleurs, on a d'une part, pour tout  $y \neq 0$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1.$$

D'autre part, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 1.$$

Ainsi,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$  donc  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .