Liste d'exercices n°27 — Fonctions de deux variables

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t(x, y)) = tf(x, y)$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 2. Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3. Trouver les points critiques des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$f : (x, y) \mapsto x^2 + x^2y + y^3$, $\quad g : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $\quad h : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Exercice 4. Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & [0,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}. \end{array}$$

Trouver le maximum de f.

Exercice 5. Trouver les extrema de $f : (x, y) \longmapsto x^2 + 2y^2 - x$ sur le disque unité fermé.

Exercice 6. Par un changement de variables polaire, résoudre sur $]0; +\infty[\times\mathbb{R}$ les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

2. $$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2}.$$