

Corrigé de la liste d'exercices n°24

Déterminants

Exercice 1.

Puisque A est antisymétrique, on a $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$ car n est impair donc $\det(A) = 0$.

Exercice 2.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $n < p$.

On a $\text{rg}(A) \leq \min(n, p) = n < p$ et $\text{rg}(B) \leq p$.

Ainsi, en utilisant la propriété analogue sur les applications linéaires, on a

$$\text{rg}(BA) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)) < p$$

avec $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Ainsi, BA ne peut pas être inversible donc $\det(BA) = 0$.

Exercice 3.

En effectuant les n permutations $C_i \leftrightarrow C_{n+i}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \times (-1)^n = 1.$$

Exercice 4.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^5 L_i}{=} \begin{vmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_i \leftarrow C_i - C_1}{=} \\ & 15 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{L_i \leftarrow L_i - L_4}{=} 15 \begin{vmatrix} -5 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ & = -15 \begin{vmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15 \times 5^3 = 1875. \end{aligned}$$

Exercice 5. En utilisant la formule $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2})$, on remarque que $C_1 + C_3 = 2 \cos(\theta) C_2$. Ainsi, les colonnes de ce déterminant sont liées, donc ce déterminant est nul.

Exercice 6.

Nommons D le déterminant qu'on souhaite calculer.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$V(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(d-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

d'après la formule du déterminant de Vandermonde. V est une fonction polynomiale de degré 4 et lorsqu'on développe $V(x)$ par rapport à la dernière ligne, on remarque que

$$V(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(d-a)x^4 - Dx^3 + \dots$$

En développant la forme factorisée de $V(x)$ (ou d'après les relations coefficients-racines), on trouve :

$$D = (a+b+c+d)(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(d-a).$$

Exercice 7. En effectuant les opérations $L_{p+1} \leftarrow L_{p+1} - L_p$, puis $L_p \leftarrow L_p - L_{p-1}$, etc. puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, puisque pour tout (i, j) , on a $\binom{m+i}{j} - \binom{m+i-1}{j} = \binom{m+i-1}{j-1}$, on obtient

$$D(m, p) = \begin{vmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \binom{m}{p} \\ 0 & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p-1} \\ 0 & \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{m+p-1}{0} & \binom{m+p-1}{1} & \dots & \binom{m+p-1}{p-1} \end{vmatrix} = D(m, p-1).$$

Par récurrence, on obtient $D(m, p) = D(m, 1) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 1$.

Exercice 8. On a

$$A\Omega = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \dots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega P(\omega) & \dots & \omega^{n-1} P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1} P(\omega) & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\det(A) \det(\Omega) = \det(A\Omega) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1}) \det(\Omega)$. Puisque $\det(\Omega) \neq 0$ (car c'est un déterminant de Vandermonde dont les paramètres sont deux à deux distincts), on trouve bien $\det(A) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1})$.

Exercice 9.

1. On a $D_2(a, b, c) = a^2 - bc$ et $D_3(a, b, c) = a \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - 2abc$.
2. En développant par rapport à la première colonne, on trouve

$$D_n(a, b, c) = aD_{n-1}(a, b, c) - b \begin{vmatrix} c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & a & c \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

En développant ce dernier déterminant par rapport à la première ligne, il vient $D_n(a, b, c) = aD_{n-1}(a, b, c) - bcD_{n-2}(a, b, c)$.

3. On a donc $D_n(1, 1, -1) = D_{n-1}(1, 1, -1) + D_{n-2}(1, 1, -1)$. De plus, $D_1(1, 1, -1) = 1$, $D_2(1, 1, -1) = 2$, $D_3(1, 1, -1) = 3$. On en déduit que $D_n(1, 1, -1) = F_{n+1}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci (définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$).

On peut alors démontrer que pour tout $n \geq 1$ $D_n(1, 1, -1) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

Exercice 10.

1. Soit $P(X) = \det(P_1 + XP_2)$. P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul puisque $P(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det(P) \neq 0$. Ainsi, P ne peut pas avoir une infinité de racines. En particulier, il existe un réel x tel que $P(x) = \det(P_1 + xP_2) \neq 0$, i.e. $P_1 + xP_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Considérons $(P_1, P_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $P = P_1 + iP_2$. Puisque $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, d'après la question précédente, il existe un réel x tel que $Q = P_1 + xP_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Par hypothèse, on a $PB = AP$, i.e. $P_1B + iP_2B = AP_1 + iAP_2$.

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on a

$$\begin{cases} P_1B &= AP_1 \\ P_2B &= AP_2 \end{cases}$$

donc $P_1B + xP_2B = AP_1 + xAP_2$, i.e. $QB = AQ$, puis $B = Q^{-1}AQ$.

Exercice 11. On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, avec $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Or, pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $S^T = S$ et pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $A^T = -A$.

Ainsi, dans une base adaptée à la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, la matrice de l'application $M \mapsto M^T$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ avec $\frac{n(n-1)}{2}$ fois la valeur -1 sur la diagonale, donc le déterminant de cette application vaut $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 12.

1. En appliquant l'hypothèse à $B = A$, on a $\det(2A) = 2\det(A)$, i.e. $2^n \det(A) = 2\det(A)$ d'où $\det(A)(2^{n-1} - 1) = 0$. Puisque $n \geq 2$, on a $2^{n-1} - 1 \neq 0$ donc $\det(A) = 0$.
2. Supposons par l'absurde que $A \neq 0$. Alors il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_j \neq 0$ où C_j est la j -ème colonne de A .

Complétons $-C_j$ en une base $(C'_1, \dots, C'_{j-1}, -C_j, C'_{j+1}, \dots, C'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et notons B la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers cette nouvelle base.

Alors B est inversible donc $\det(A) + \det(B) = \det(B) \neq 0$.

Par ailleurs, la j -ème colonne de $A + B$ est nulle donc $\det(A + B) = 0$. On a donc $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Ainsi, si $A \neq 0$, on peut construire une matrice B telle que $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Donc la seule matrice A qui satisfait la propriété voulue est $A = 0$.