

## Corrigé de la liste d'exercices n°25

## Espaces préhilbertiens

### Exercice 1.

1. Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille  $(u, v)$ .

On pose  $e_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, 1, -1)$ .

Posons  $e'_2 = v - \langle v, e_1 \rangle e_1 = (1, 1, 3, 0) - \frac{6}{7}(2, 1, 1, -1) = \frac{1}{7}(-5, 1, 15, 6)$  puis  $e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{287}}(-5, 1, 15, 6)$ .

La famille  $(e_1, e_2)$  est alors une base orthonormée de  $F$ .

2. On a

$$(x, y, z, t) \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle u, (x, y, z, t) \rangle = 0 \\ \langle v, (x, y, z, t) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}.$$

3. Puisque  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormée de  $F$ , on a

$$\begin{aligned} p_F(w) &= \langle w, e_1 \rangle e_1 + \langle w, e_2 \rangle e_2 \\ &= \frac{8}{7}(2, 1, 1, -1) - \frac{41}{287}(-5, 1, 15, 6) \\ &= \frac{8}{7}(2, 1, 1, -1) - \frac{1}{7}(-5, 1, 15, 6) \\ &= \frac{1}{7}(21, 7, -7, -14) \\ &= (3, 1, -1, -2) \end{aligned}$$

et  $p_{F^\perp}(w) = w - p_F(w) = (2, 1, -1, 4)$ .

4. On a  $d(w, F) = \|w - p_F(w)\| = \|p_{F^\perp}(w)\| = \sqrt{22}$ .

### Exercice 2.

1. Soient  $(x, y) \in E^2$ . Par hypothèse, on a

$$0 = \langle f(x+y), x+y \rangle = \langle f(x) + f(y), x+y \rangle = \underbrace{\langle f(x), x \rangle}_{=0} + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle + \underbrace{\langle f(y), y \rangle}_{=0}$$

donc  $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$ .

2. Soient  $(x, y) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)$ . Par hypothèse, on a  $f(x) = 0_E$  et il existe  $z \in E$  tel que  $y = f(z)$ . On a alors (en utilisant la question précédente) :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = -\langle f(x), z \rangle = -\langle 0_E, z \rangle = 0,$$

ce qui prouve que  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont orthogonaux.

### Exercice 3. • Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthogonale.

Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Par hypothèse, on a

$$1 = \|e_i\|^2 = \langle e_i, e_i \rangle^2 + \sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 1 + \sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2$$

donc  $\sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$ . Puisque c'est une somme de nombres réels au carré, c'est une somme nulle à termes positifs donc tous les termes sont nuls, i.e. pour tout  $k \neq i$ ,  $\langle e_i, e_k \rangle = 0$ , ce qui prouve que la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est orthogonale, puis orthonormée puisque tous les vecteurs sont de norme 1. En particulier, c'est une famille libre.

• Soit  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ . Montrons que  $F = E$ . Pour cela, montrons que  $F^\perp = \{0_E\}$ .

Soit  $x \in F^\perp$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $\langle x, e_k \rangle = 0$  donc  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2 = 0$ , d'où  $x = 0_E$ ,

ce qui prouve que  $F^\perp = \{0_E\}$ .

Puisque  $F$  est de dimension finie, on a  $E = F \oplus F^\perp = F$ , donc la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est également génératrice dans  $E$ .

On en conclut que la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $E$ .

#### Exercice 4.

1. Preuve faite en cours.
2. Soit  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Appliquons-lui le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : on obtient alors une base orthonormée  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathbb{R}_k[X]$ .

Montrons que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg(P_k) = k$ .

• Si  $k = 0$ , on a  $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$  donc  $\deg(P_0) = 0$  (puisque  $P_0 \neq 0$ ).

• Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a  $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$  donc  $\deg(P_k) \leq k$ .

Si on avait  $\deg(P_k) \leq k - 1$ , on aurait  $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$ , ce qui contredirait la liberté de la famille  $(P_0, \dots, P_k)$ .

On a donc forcément  $\deg(P_k) = k$ , et ce pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

3. Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt à  $(1, X, X^2)$ .

On pose  $P_0 = \frac{1}{\|1\|} = 1$ .

Posons  $Q_1 = X - \langle X, P_0 \rangle P_0 = X - \langle X, 1 \rangle = X - \frac{1}{2}$ .

On a  $\|Q_1\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3} \left[ \left(t - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$ .

On pose alors  $P_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|} = \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} \left(X - \frac{1}{2}\right)$ .

Posons  $Q_2 = X^2 - \langle X^2, P_1 \rangle P_1 - \langle X^2, P_0 \rangle P_0$ .

On a

$$\langle X^2, P_0 \rangle P_0 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

et

$$\langle X^2, P_1 \rangle = 2\sqrt{3} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right) dt = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ainsi,  $Q_2 = X^2 - (X - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3} = X^2 - X + \frac{1}{6}$ .

On a

$$\|Q_2\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36}\right) dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}.$$

Posons  $P_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|} = \sqrt{180} \left( X^2 - X + \frac{1}{6} \right) = 6\sqrt{5} \left( X^2 - X + \frac{1}{6} \right)$ .

La famille  $(P_0, P_1, P_2)$  est alors une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

On a  $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \langle X^2, P_0 \rangle P_0 + \langle X^2, P_1 \rangle P_1 = X - \frac{1}{6}$  donc

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - (X - \frac{1}{6})\| = \|Q_2\| = 6\sqrt{5}.$$

**Exercice 5.** • Le sens direct a été vu en cours : c'est l'inégalité de Bessel (qui est encore valable ici puisque  $E = \ker(p) \oplus^\perp \text{Im}(p)$ ).

• Réciproquement, supposons que pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ . Montrons que  $\ker(p) = \text{Im}(p)^\perp$ .

Puisque  $p$  est un projecteur, on a déjà  $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$  et par unicité du supplémentaire orthogonal, il suffit de montrer que  $\ker(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont orthogonaux.

Soient  $(x, y) \in \ker(p) \times \text{Im}(p)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \|p(\lambda x + y)\| \leq \|x + \lambda y\| &\Leftrightarrow \|p(x + \lambda y)\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

et ce pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Ainsi, la fonction  $\lambda \mapsto \lambda \langle x, y \rangle + \|x\|^2$  est une fonction affine de signe constant : ceci implique que son coefficient directeur est nul, i.e.  $\langle x, y \rangle = 0$ , ce qu'on voulait montrer.

**Exercice 6.**

1. Soit  $y \in E$ . Considérons l'application

$$\varphi_y : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle f(x), y \rangle \end{array} .$$

Par linéarité de  $f$  et bilinéarité du produit scalaire, on montre aisément que  $\varphi_y$  est une forme linéaire sur  $E$ . D'après le théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien, il existe un unique vecteur, que l'on notera  $f^*(y)$ , tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi_y(x) = \langle f^*(y), x \rangle$ , i.e.  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ .

On a montré dans le cours que si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ , alors nécessairement,

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^n \varphi_y(e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \langle f(e_i), y \rangle e_i.$$

2. L'expression obtenue en question précédente pour  $f^*(y)$  est clairement linéaire en  $y$ .
3. Soit  $N$  la matrice de  $f^*$  dans la base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Puisque  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée, on a pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$N_{i,j} = \langle f^*(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, f(e_i) \rangle = M_{j,i}$$

donc  $N = M^T$ .

4. Soit  $x \in F^\perp$ . Montrons que  $f^*(x) \in F^\perp$ .

Pour tout  $y \in F$ , on a

$$\langle f^*(x), y \rangle = \underbrace{\langle x, f(y) \rangle}_{\substack{\in F^\perp \\ \in F}} = 0$$

donc  $f^*(x) \in F^\perp$ , ce qui prouve que  $F^\perp$  est stable par  $f^*$ .

**Exercice 7.** • Si la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est liée, alors la matrice n'est pas inversible donc  $\det(M) = 0$  et l'inégalité est claire.

• Supposons que la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est libre : c'est donc une base de  $\mathbb{R}^n$ . Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt à cette famille libre. On obtient une base orthonormée  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(X_1, \dots, X_k) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_k)$ .

Posons  $Y_1 = C_1$  et pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $Y_k = C_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle C_k, X_i \rangle X_i$ . On sait que pour tout

$$k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k = \frac{Y_k}{\|Y_k\|}.$$

Soit  $N$  la matrice dont les colonnes sont  $Y_1, \dots, Y_n$ .

Puisque pour tout  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(X_1, \dots, X_{k-1}) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_{k-1})$  et qu'on ne modifie pas la valeur d'un déterminant en retranchant à une colonne une combinaison linéaire des autres, on a  $\det(N) = \det(M)$ .

Par ailleurs, puisque les colonnes de  $N$  forment une famille orthogonale, on a  $N^T N = \text{diag}(\|Y_1\|^2, \dots, \|Y_n\|^2)$ .

$$\text{Ainsi, } \det(M)^2 = \det(N)^2 = \det(N^T N) = \det(N^T) \det(N) = \det(N^T N) = \prod_{k=1}^n \|Y_k\|^2.$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $C_k = Y_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle C_k, X_i \rangle}{\|Y_i\|} Y_i$ . Puisque la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est orthogonale, on déduit du théorème de Pythagore que pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,

$$\|C_k\|^2 = \|Y_k\|^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \langle C_k, X_i \rangle^2 \geq \|Y_k\|^2$$

(et ceci est vrai également pour  $k = 1$ ).

Ainsi, on a  $\det(M)^2 = \prod_{k=1}^n \|Y_k\|^2 \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\|^2$ , d'où  $|\det(M)| \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\|$ , ce qu'il fallait montrer.

• Montrons le cas d'égalité. Supposons que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $C_k \neq 0$ .

Si la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est orthogonale, elle est libre et on a pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $Y_k = C_k$

donc la preuve précédente montre que  $|\det(M)| = \prod_{k=1}^n \|Y_k\| = \prod_{k=1}^n \|C_k\|$ .

Réciproquement, supposons que  $|\det(M)| = \prod_{k=1}^n \|C_k\|$ . D'après la preuve précédente, il faut

alors qu'on ait pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|C_k\| = \|Y_k\|$  donc pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ ,  $\langle C_k, X_i \rangle = 0$ , ce qui implique que pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $C_k = Y_k$  et donc que la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est orthogonale.