

Corrigé de la liste d'exercices n°26

Séries numériques

Exercice 1.

1. (a) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

donc

$$\begin{aligned} v_n &= \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

- (b) Puisque la série (à termes positifs) $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\sum v_n$ est absolument convergente, i.e. $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge. D'après le lien suite-série, on en déduit que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- (c) Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^l$, d'où $\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \sim e^l$, puis $n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, avec $C = e^{-l} > 0$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = \cos^{n+1}(x)$, $u'(x) = -(n+1) \sin(x) \cos^n(x)$, $v'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^{n+1}(x) dx \\ &= [\sin(x) \cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x)) \cos^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x) dx \\ &= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2} \end{aligned}$$

donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$

- (b) • Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

Pour $n = 0$, on a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \frac{(2 \times 0)!}{(2^0 0!)^2} = \frac{\pi}{2}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$, i.e. $W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}$.

D'après la question précédente, on a $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2(n+1)(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}$$

d'où $W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}$, ce qui prouve la formule au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}}$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Pour $n = 0$, on a $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$ et $\frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. Montrons la propriété au rang $n + 1$, i.e. $W_{2n+3} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$.

D'après la question précédente, on a $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2 (2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \frac{2^2 (n+1)^2 (2^n n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!},$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et d'après la question précédente, on a

$$(n+1)W_n W_{n+1} = (2k+1)W_{2k} W_{2k+1} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{2} \frac{2k+1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}.$$

• Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} (n+1)W_n W_{n+1} &= (2k+2)W_{2k+1} W_{2k+2} \\ &= (2k+2) \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} \frac{\pi}{2} \frac{(2k+2)!}{(2^{k+1}(k+1)!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2k+2)^2}{(2(k+1))^2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}}.$

- (d) Puisque la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est l'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ d'où en divisant par W_n les inégalités ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1,$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$,

i.e. $\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}}.$

Puisque $n \underset{+\infty}{\sim} n+1$, on a donc d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_n W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2$$

d'où $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.

Ainsi, $\sqrt{W_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ donc $\sqrt{W_n^2} = |W_n| = W_n$.

On en conclut que

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}.$$

- (e) D'après l'équivalent de la question précédente, on a $W_{2n} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Or, d'après les questions 2b) et 1a), on a

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \sim \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{C^2 n^{2n+1} e^{-2n}} = \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}.$$

Par transitivité de l'équivalence, on obtient $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sim \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}$ d'où $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}.$

On en déduit que $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}.$

Exercice 2. Procédons par disjonction de cas.

- Supposons que $\alpha < 1$.

On a $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)$: en effet, $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}} = n^{\alpha-1} \ln(n)^\beta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\alpha - 1 < 0$ (et ce quelque soit la valeur de β par croissances comparées).

Puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge.

- Supposons que $\alpha > 1$. Soit $\alpha' \in]1, \alpha[$.

On a $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right).$

En effet, $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{\alpha' - \alpha}}{\ln(n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\alpha' - \alpha < 0$ (et ce quelque soit la valeur de β par croissances comparées).

Puisque $\alpha' > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\alpha'}}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.

• Supposons que $\alpha = 1$ et étudions la convergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$.

Posons pour tout $t \geq 2$, $f(t) = \frac{1}{t \ln(t)^\beta}$. Pour tout $t \geq 2$, on a

$$f'(t) = -\frac{\ln(t)^\beta + \beta \ln(t)^{\beta-1}}{(t \ln(t)^\beta)^2} = -\frac{\ln(t)^{\beta-1}(\ln(t) + \beta)}{(t \ln(t)^\beta)^2}.$$

La fonction f est donc continue, positive et décroissante sur $[\max(2, e^{-\beta}); +\infty[$.

D'après le critère de comparaison série-intégrale, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ a même nature que

l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^\beta}$.

★ Si $\beta = 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ diverge.

★ Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} [\ln(t)^{1-\beta}]_2^n = \frac{1}{1-\beta} (\ln(n)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } 1-\beta > 0 \\ \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{si } 1-\beta < 0 \end{cases}.$$

On en déduit que, dans ce cas, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ converge uniquement si $\beta > 1$.

On en conclut que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 3.

1. On a $\frac{1 + \ln(n)}{n^2} \sim \frac{1}{n^2 \ln(n)^{-1}}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2 \ln(n)^{-1}}$ converge d'après l'exercice précédent.

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{1 + \ln(n)}{n^2}$ converge.

2. On a $\frac{2^n + 5}{3^n - 11} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, la série géométrique $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge et par comparaison de séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang), on en déduit que la série $\sum \frac{2^n + 5}{3^n - 11}$ converge.

3. On a $\frac{n + \ln(n)}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n}$. Puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum \frac{n + \ln(n)}{n^2 + 1}$ diverge.

4. On a $n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{n^2}{2^n}$.

Par croissances comparés, on a $\frac{n^2}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc par comparaison de séries à termes

positifs, $\sum \frac{n^2}{2^n}$ converge, puis $\sum n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge également (puisque cette dernière série est à termes positifs).

5. D'après le critère de Riemann, la série $\sum n^{\ln(a)} = \sum \frac{1}{n^{-\ln(a)}}$ converge si et seulement si $-\ln(a) > 1$, i.e. $a < e^{-1}$.
6. Par croissances comparées, on a $e^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.
7. On a $n \times n^{\frac{1}{n}} = n^{1+\frac{1}{n}} \geq n$ donc $\sum n \times n^{\frac{1}{n}}$ diverge grossièrement.
8. On a $\ln(\cos(\frac{1}{n})) = \ln(1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})) \sim -\frac{1}{2n^2}$ donc $\frac{\ln(\cos(\frac{1}{n}))}{(n+1)^\alpha} \sim -\frac{1}{2n^{2+\alpha}}$. Puisque les séries $\sum \frac{\ln(\cos(\frac{1}{n}))}{(n+1)^\alpha}$ et $\sum -\frac{1}{2n^{2+\alpha}}$ sont de même signe, elles ont même nature. On en déduit que la série $\sum \frac{\ln(\cos(\frac{1}{n}))}{(n+1)^\alpha}$ converge si et seulement si $2 + \alpha > 1$, i.e. $\alpha > -1$.
9. Posons $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!} > 0$.

• 1ère méthode : Critère de d'Alembert.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^3 (3n)!}{(3n+3)! (n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{27} < 1.$$

D'après le critère de D'Alembert, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

• 2ème méthode : Formule de Stirling.

$$\text{On a } u_n \sim \frac{(2\pi n)^{\frac{3}{2}} n^{3n} e^{-3n}}{\sqrt{6\pi n} (3n)^{3n} e^{-3n}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{n}}{27^n}.$$

On peut de nouveau conclure par le critère de d'Alembert, ou bien en remarquant que $\frac{\sqrt{n}}{27^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

10. On a $\frac{(n+1)^4}{n!+1} \sim \frac{n^4}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{(n+1)^4}{n!+1}$ converge.
11. On a $\frac{1! + \dots + (n-1)!}{n!} \sim \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \frac{1! + \dots + (n-1)!}{n!} \sim \frac{(n-1)!}{n!}$ diverge.
12. On a $\frac{1! + \dots + (n-2)!}{n!} \sim \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \frac{1! + \dots + (n-2)!}{n!} \sim \frac{(n-1)!}{n!}$ converge.

Exercice 4. $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, remarquons déjà que :

$$\begin{aligned} u_n &= n^{-\alpha}, \\ v_n &= u_n - u_{n+1}, \\ w_n &= v_n - v_{n+1}. \end{aligned}$$

1.

La suite $(u_n)_n$ est $\begin{cases} \text{convergente et } \lim_n u_n = 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ \text{constante } u_n = 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \text{divergente } \lim_n u_n = +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
--

2. La série $\sum_n v_n$ est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{N+1}.$$

La série $\sum_n v_n$ a donc la même nature que la suite $(u_n)_n$.

La série $\sum_n v_n$ est $\begin{cases} \text{convergente et } \sum_n v_n = u_1 = 1 & \text{si } \alpha > 0 \\ \text{convergente et } \sum_n v_n = 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \text{divergente } (\sum_n v_n = -\infty) & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

3. La série $\sum_n w_n$ est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N w_n = \sum_{n=1}^N (v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_{N+1}.$$

La série $\sum_n v_n$ a donc la même nature que la suite $(v_n)_n$, qui nécessite du coup une étude à part entière. Mettons de côté le cas trivial, $\alpha = 0$: dans cette situation, $v_n = 0$ et alors $\sum_n w_n$ converge vers 0 aussi. Supposons désormais que $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} v_n &= n^{-\alpha} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} \right) \\ &= n^{-\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &= n^{-\alpha} \left(\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \alpha n^{-(\alpha+1)} + o(n^{-(\alpha+1)}) \\ &\sim \alpha n^{-(\alpha+1)} \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_n$ converge donc ssi $\alpha+1 \geq 0$, c.à.d. $\alpha \geq -1$. Remarquons que cela comprend aussi le cas $\alpha = 0$.

Si $\alpha < -1$, $\lim_n v_n = -\infty$.

Conclusion :

La série $\sum_n w_n$ est $\begin{cases} \text{convergente et } \sum_n w_n = v_1 = 1 - \frac{1}{2^\alpha} & \text{si } \alpha \geq -1 \\ \text{divergente } (\sum_n w_n = +\infty) & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$
--

Exercice 5.

1. On a $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum v_n$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+4} = \frac{3}{(6n+1)(6n+4)} = v_n.$$

3. La suite $(\frac{1}{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (u_{2k} + u_{2k+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exercice 6. Nous allons désormais noter S_N pour la somme partielle de la série $\sum_n v_n$: i.e.

$$S_N = \sum_{n=0}^N v_n \text{ (ou } S_n = \sum_{n=1}^N v_n \text{ ou } S_n = \sum_{n=2}^N v_n \text{ si la suite n'est définie que pour } n \geq 1 \text{ ou } n \geq 2).$$

a) Pour $n \geq 1$:

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ainsi

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$

donc

La série converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

b)

Pour $n \geq 0$, on multiplie en haut et en bas par l'expression conjuguée :

$$v_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

ainsi

$$S_N = \sqrt{N+1}$$

donc

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ diverge

c)

Pour $n \geq 2$

$$v_n = \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{(n+1)n(n-1)}.$$

Nous voulons décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(X+1)X(X-1)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{(X+1)X(X-1)} = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X} + \frac{C}{X-1}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

- Calcul de A : on multiplie l'expression par $X+1$ et on évalue en $X = -1$. Cela donne $\frac{1}{(-1)(-1-1)} = \frac{1}{2} = A$.
- Calcul de B : on multiplie l'expression par X et on évalue en $X = 0$. Cela donne $\frac{1}{(0+1)(0-1)} = -1 = B$.
- Calcul de C : on multiplie l'expression par $X-1$ et on évalue en $X = 1$. Cela donne $\frac{1}{(1+1)1} = \frac{1}{2} = C$.

ainsi

$$\frac{1}{(X+1)X(X-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X+1} - \frac{2}{X} + \frac{1}{X-1} \right).$$

Ainsi,

$$v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right)$$

donc

$$S_N = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right).$$

En conclusion

La série converge et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{4}$.

d)

Rappel de trigonométrie, transformation de produit en somme/différence :

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

On l'applique avec $a = \frac{\pi}{4n^2-1}$ et $b = \frac{2n\pi}{4n^2-1}$:

$$\sin \left(\frac{\pi}{4n^2-1} \right) \sin \left(\frac{2n\pi}{4n^2-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2n-1} \right) \right)$$

ainsi

$$S_N = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2N+1} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{-1} \right) \right)$$

La série converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{4n^2-1} \right) \sin \left(\frac{2n\pi}{4n^2-1} \right) = 1$.

e) Soit $n \geq 1$. On a

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{\ln(n)}{n} \right) &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{(n+1)\ln(n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} \end{aligned}$$

ainsi

$$S_N = \frac{\ln(N+1)}{N+1} - \frac{\ln(1)}{1} = \frac{\ln(N+1)}{N+1}.$$

Conclusion

La série converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{\ln(n)}{n} \right) = 0$.

f)

L'idée est de transformer $\arctan(\frac{1}{1+n+n^2})$ en une différence de deux termes. On part de la formule de la tangente de la différence de deux réels $a, b \in]-\pi/2; \pi/2[$:

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

soit

$$a-b = \arctan\left(\frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}\right)$$

on pose $\alpha = \tan(a), \beta = \tan(b)$ de sorte que la formule devient

$$\arctan(\alpha) - \arctan(\beta) = \arctan\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$$

ceci étant valable pour toutes valeurs réelles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $1 + \alpha\beta \neq 0$. Il s'agit pour nous de trouver α, β telles que $\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{1}{1+n+n^2}$. On peut par exemple essayer de résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ 1 + \alpha\beta = 1 + n + n^2 \end{cases}$$

En posant $\bar{\beta} = -\beta$, on a des équations pour la somme $s = \alpha + \bar{\beta} = 1$ et le produit $p = \alpha\bar{\beta} = -n - n^2$. Ainsi $\alpha, \bar{\beta}$ sont les racines de l'équation $x^2 - sx + p = 0$ soit $x^2 - x - n - n^2 = 0$. Une résolution rapide nous donne les racines $n+1, -n$. On peut en effet poser $\alpha = n+1, \beta = n$ et on a

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

par conséquent

$$\sum_{n=0}^N \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \arctan(N+1) - \arctan(0) = \arctan(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion

La série converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

g)

On décompose une fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{(X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2})} = \frac{1}{X - \frac{1}{2}} - \frac{1}{X + \frac{1}{2}}$$

ainsi

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{0 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{N + \frac{1}{2}}$$

conclusion

La série converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = -2.$

h)

Soit $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) \\ &= \ln(n+1) - 2\ln(n) + \ln(n-1) \\ &= (\ln(n+1) - \ln(n)) - (\ln(n) - \ln(n-1))\end{aligned}$$

ainsi

$$\sum_{n=2}^N \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = (\ln(N+1) - \ln(N)) - (\ln(2) - \ln(2-1))$$

or

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N+1) - \ln(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = 0.$$

En conclusion

La série converge et $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2).$

i)

Comme à la question f. on cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{1}{2n^2}.$$

Après un calcul rapide on trouve $\alpha = 2n + 1, \beta = 2n - 1$:

$$\arctan(2n + 1) - \arctan(2n - 1) = \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

ainsi

$$\sum_{n=1}^N \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \arctan(2N + 1) - \arctan(2 \cdot 1 - 1) = \arctan(2N + 1) - \frac{\pi}{4}$$

conclusion

La série converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n}$.

1. Comme la suite (u_n) est strictement positive, on a $S_n \geq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De ce fait, $v_n \leq \frac{1}{u_0} u_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum v_n$ est convergente.

2. On a pour tout $k \in \mathbb{N}, 1 - v_k = 1 - \frac{u_k}{S_k} = \frac{S_k - u_k}{S_k} = \frac{S_{k-1}}{S_k}$ d'où

$$\prod_{k=1}^n (1 - v_k) = \prod_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{S_k} = \frac{S_0}{S_n} = \frac{u_0}{S_n}.$$

3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.

(a) Comme la série $\sum v_n$ est convergente, nécessairement on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Ainsi $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$. Par équivalence de séries de signe constant, on en déduit que la série de terme général $\ln(1 - v_n)$ est convergente.

(b) Soit $T_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 - v_k)$. On sait d'après la question précédente que la suite T_n est convergente de limite T . On a

$$\prod_{k=1}^n (1 - v_k) = e^{\ln\left(\prod_{k=1}^n (1 - v_k)\right)} = e^{\sum_{k=1}^n \ln(1 - v_k)} = e^{T_n}.$$

D'après la question 2, on a $e^{T_n} = \frac{u_0}{S_n}$ d'où $S_n = \frac{u_0}{e^{T_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 e^{-T}$, ce qui montre que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_{2n} \geq 0$.

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_{2n} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n} = 0$.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = 2nu_{2n} + u_{2n}$.

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0$.

Puisque les deux sous-suites $(2nu_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $((2n+1)u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0, on en déduit que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, i.e. $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Exercice 9.

1. Puisque la suite $(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0, on peut réaliser un développement asymptotique de v_n :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Ainsi, $v_n \sim \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum v_n$ diverge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = v_n + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Puisque la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, on sait d'après le théorème des séries alternées que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Ainsi, u_n est la somme du terme général d'une série divergente et du terme général d'une série convergente : on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Remarque : on a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ainsi, deux séries peuvent avoir des termes généraux équivalents mais ne pas être de même nature.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On pose, pour $n > 0$, $v_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$.

1. On suppose que $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbb{C}$.

- (a) On sait que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $|a| < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Si $a = 1$, on a $v_n = n + 1$ donc la série $\sum v_n$ diverge.

On suppose dorénavant que $a \neq 1$.

v_n est la somme de $n + 1$ termes consécutifs d'une suite géométrique donc

$$v_n = a^n \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Supposons $|a| = 1$. Si la série de terme général v_n convergeait, la suite v_n devrait tendre vers 0. De ce fait, la suite $(1 - a^{n+1})$ devrait tendre vers 0. Or, $\sum_{k=0}^n u_k =$

$\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, ainsi la série de terme général u_n serait convergente, ce qui est absurde car $|a| = 1$. Donc si $|a| = 1$, la série de terme général v_n diverge.

Si $|a| > 1$, on voit facilement que la série de terme général v_n diverge grossièrement.

Si $|a| < 1$, utilisons le critère de d'Alembert. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = |a| \frac{|1 - a^{n+2}|}{|1 - a^{n+1}|}.$$

Ainsi, puisque $|a| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = |a| < 1$, donc d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $|a| < 1$, donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

- (b) Si $|a| < 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n v_k &= \frac{1}{1-a} \sum_{k=1}^n (a^k - a^{2k+1}) \\ &= \frac{1}{1-a} \sum_{k=1}^n (a^k - a \sum_{k=1}^n (a^2)^k) \\ &= \frac{1}{1-a} \left(a \frac{1-a^n}{1-a} - a^3 \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \right). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{a}{1-a^2} - \frac{a^3}{1-a^3}.$$

2. On suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Il est clair que pour tout $n > 0$, $v_n > u_n$ donc si $\alpha \leq 1$, la série de terme général v_n est divergente.

Si $1 < \alpha \leq 2$, puisque pour tout $n \leq k \leq 2n$, $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{(2n)^\alpha}$, on a pour tout $n > 0$, $v_n \geq \frac{n+1}{(2n)^\alpha}$. Or quand n tend vers $+\infty$, on a $\frac{n+1}{(2n)^\alpha} \sim \frac{1}{2^\alpha n^{\alpha-1}}$ qui est le terme général d'une série divergente puisque $\alpha - 1 \leq 1$, donc la série $\sum v_n$ est divergente.

Supposons finalement $\alpha > 2$. Puisque pour tout $n \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, on a pour tout $n > 0$, $v_n \leq \frac{n+1}{n^\alpha}$. Or, quand n tend vers $+\infty$, on a $\frac{n+1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ qui est le terme général d'une série convergente puisque $\alpha - 1 > 1$. Dans ce cas, la série de terme général v_n est convergente.

Finalement, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

1. Faux comme le montre l'exemple $u_n = \frac{1}{n}$.
2. Faux comme le montre l'exemple de la suite $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$. La série $\sum u_n$ est convergente et à termes positifs mais la suite (u_n) n'est pas décroissante.
3. Faux : prendre $u_n = \frac{1}{n^2}$.
4. Vrai. A fortiori, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Il existe donc un entier naturel $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n < 1$. Donc pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n^2 \leq u_n$. Par comparaison, on en déduit que la série $\sum u_n^2$ converge.
5. Faux : Prendre $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln(n)}$.
6. C'est vrai : dans ce cas on a $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente par comparaison, donc convergente.

Exercice 12. On a pour tout entier naturel n , $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. En utilisant un développement limité, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après le théorème des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Posons $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On a $|v_n| \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Ainsi, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$ donc $\sum u_n$ est convergente comme somme de séries convergentes.

Exercice 13. La formule de Taylor-Young permet d'affirmer d'après les hypothèses de l'énoncé que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la forme $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

1. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est divergente.
2. On a $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum u_n$ converge.
3. On a $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'après le théorème des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

D'autre part, on a $u_n - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ donc la série de terme général

$u_n - \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

On en déduit que la série de terme général u_n est convergente comme somme de séries convergentes.

4. On a $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

D'autre part, on a $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}$ donc la série $\sum v_n$ est divergente.

Puisque $u_n = v_n + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum u_n$ est divergente comme somme de termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente.

Exercice 14. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. On applique le théorème des séries alternées.

2. Pour tout $n \geq 2$, on a $v_n = u_n \left(\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ donc $u_n \sim v_n$.

Cependant, on a

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)} \\ &\sim \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

donc par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général $v_n - u_n$ diverge. Ainsi, $\sum v_n = \sum (v_n - u_n) + \sum u_n$ diverge comme somme de termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente.

Exercice 15.

1. On a $|u_n| \sim \frac{1}{8n^3}$ donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente. On aurait également pu appliquer le théorème des séries alternées ici.

2. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

Le théorème des séries alternées ne s'applique pas non plus car la suite $(\frac{1}{n+(-1)^n})_{n \geq 2}$ n'est pas décroissante : en effet pour tout $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{2n + (-1)^{2n}} = \frac{1}{2n + 1} < \frac{1}{2n} = \frac{1}{(2n + 1) + (-1)^{2n+1}}.$$

En revanche, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n + (-1)^n)}$. On sait que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées et $\sum \frac{1}{n(n+(-1)^n)}$ converge car $\frac{1}{n(n+(-1)^n)} \sim \frac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum u_n$ converge car u_n est la somme de deux termes généraux de séries convergentes.

3. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série est absolument convergente. Le critère spécial des séries alternées s'applique aussi.

4. On a $|u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ donc la série est absolument convergente.

5. On a $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

6. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ donc la série n'est pas absolument convergente.

Néanmoins, la suite $\left(\frac{1}{n - \ln(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante (car la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$ est croissante sur $[1, +\infty[)$ et tend vers 0 donc la série converge d'après le critère des séries alternées.

7. Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{2n + \cos(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}$.

On a $|u_n| \sim \frac{1}{2n}$ donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

D'après le théorème des séries alternées, on voit que la série $\sum u_n$ est convergente. On peut remarquer que $u_{2n} = \frac{1}{4n-1}$ et $u_{2n+1} = -\frac{1}{4n+1}$.

Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_{2k} + u_{2k+1} = 0$.

8. Posons $u_n = \frac{n+3}{(-1)^n \sqrt{n} - 3n} = \frac{1 + \frac{n}{3}}{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - 3} \sim -\frac{1}{3}$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

9. Posons $u_n = (-1)^n \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

Soit $f(t) = \operatorname{ch}(t) \sin(t)$. On a $f'(t) = \operatorname{ch}(t) \cos(t) + \operatorname{sh}(t) \sin(t)$. Pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, on a $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que la suite $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, et on peut appliquer le théorème des séries alternées pour en déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

10. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(n \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(\left(n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &\sim \frac{1}{3n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

11. Soit $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$. En 0, on a $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$.

Ainsi, $u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où $u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - v_n$ avec $v_n \sim \frac{1}{8n}$.

D'après le théorème des séries alternées, on en déduit que la série $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente, donc elle diverge.

- 12) et 13). Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n(n+1)}$.

On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$ et $|v_n| \sim \frac{1}{n^2}$ donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes.

La suite $|u_n|$ est décroissante : on peut donc lui appliquer le théorème spécial des séries alternées. En revanche, on a $|v_{2k}| < |v_{2k+1}|$ donc on ne peut pas appliquer le théorème des séries alternées pour la série $\sum v_n$.

Exercice 16.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$10^{n+1}x - 1 < \lfloor 10^{n+1}x \rfloor \leq 10^{n+1}x$$

et

$$10^{n+1}x - 10 < 10\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1}x$$

donc

$$a_n = \lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor \in]-1, 10[.$$

Puisque $a_n \in \mathbb{Z}$ comme différence d'entiers, on en déduit que $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \frac{\lfloor 10^{n+1}x \rfloor}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = \frac{\lfloor 10^{N+1}x \rfloor}{10^{N+1}} - \lfloor x \rfloor = \frac{\lfloor 10^{N+1}x \rfloor}{10^{N+1}}$$

car $x \in [0, 1[$.

Or, on sait que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 10^{N+1}x \rfloor}{10^{N+1}} = x$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = x$.

3. • Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n+p} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons N l'entier dont l'écriture en base 10 est $N = \overline{a_0 \dots a_{p-1}}$.

On a $10^p x = N + x$ donc $x = \frac{N}{10^p - 1}$, ce qui prouve que $x \in \mathbb{Q}$.

• Réciproquement, supposons que $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Le développement décimal (potentiellement illimité) de x s'obtient par des divisions euclidiennes successives par q . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles, on finit nécessairement par retomber sur les mêmes restes et le développement décimal est nécessairement périodique.