

Corrigé de la liste d'exercices n°27

Fonctions de deux variables

Exercice 1. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$, on a pour (h, k) proche de $(0, 0)$:

$$f(h, k) = f(0, 0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + o(\|(h, k)\|).$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, pour tout $t > 0$, on a $f(t(x, y)) = tf(x, y)$. Par continuité de f en $(0, 0)$ (puisque f y est de classe $\mathcal{C}^1$), en faisant tendre t vers 0, on obtient $f(0, 0) = 0$.

Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Pour $t > 0$ suffisamment proche de 0, on a (th, tk) proche de $(0, 0)$, et le développement limité de f en $(0, 0)$ s'écrit :

$$f(th, tk) = th \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + tk \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + o(\|(th, tk)\|) = th \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + tk \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \|(th, tk)\| \varepsilon(th, tk)$$

où ε est définie au voisinage de $(0, 0)$ et vérifie $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(th, tk) = 0$. En utilisant l'hypothèse sur f et l'homogénéité de la norme

$$tf(h, k) = th \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + tk \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + t\|(h, k)\| \varepsilon(th, tk)$$

puis en simplifiant par $t > 0$:

$$f(h, k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \|(h, k)\| \varepsilon(th, tk)$$

et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$f(h, k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

ce qui est valable pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

Autrement dit, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $f(h, k) = \langle \nabla f(0, 0), (h, k) \rangle$, ce qui assure la linéarité de f .

Exercice 2. • On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0$.

• De même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1.$$

• On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t, \sqrt{t}) = 1$.

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 0} (t, \sqrt{t}) = (0, 0)$ mais $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, \sqrt{t}) = 1 \neq f(0, 0) = 0$ donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3. • On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

donc le seul point critique de f est $(0, 0)$.

• On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 &= 0 \\ 6xy - 12 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 &= 0 \\ xy - 2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 &= 0 \\ y &= \frac{2}{x} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\ y &= \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)(x^2 - 4) &= 0 \\ y &= \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &\in \{-1, 1, -2, 2\} \\ y &= \frac{2}{x} \end{cases}. \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont $(1, 2), (-1, -2), (2, 1), (-2, -1)$.

• On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x - y) &= 0 \\ 4y^3 + 4(x - y) &= 0 \end{cases} \xLeftrightarrow^{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ x^3 + y^3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x &= 0 \\ y &= -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2) &= 0 \\ y &= -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &\in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ y &= -x \end{cases}. \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont $(0, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Exercice 4. Puisque $[0, 1]^2$ est un fermé borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie ($\mathbb{R}^2$) et que f y est continue, la fonction f y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum sur $[0, 1]^2$. Si ce maximum est atteint dans $]0, 1[^2$, c'est un point critique de f .

• Déterminons les points critiques de f dans $]0, 1[^2$. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(1+y^2)} \frac{1+x^2-2x(x+y)}{(1+x^2)^2} &= 0 \\ \frac{1}{(1+x^2)} \frac{1+y^2-2y(x+y)}{(1+x^2)^2} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 2xy + 1 &= 0 \\ -y^2 - 2xy + 1 &= 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow^{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} -x^2 - 2xy + 1 &= 0 \\ x^2 - y^2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 &= 1 \\ x &= y \end{cases} \end{aligned}$$

Le seul point critique de f dans $]0, 1[^2$ est donc $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Si f admet son maximum dans $]0, 1[^2$,

celui-ci vaut donc $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{16}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

• Etudions désormais f sur les quatre côtés du carré $[0, 1]^2$.

★ Si $y = 0$, on a $f(x, 0) = \frac{x}{1+x^2} = g(x)$.

On a $g'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ pour $x \in [0, 1]$.

Ainsi, sur le côté d'équation $y = 0$, f admet son maximum en $x = 1$ et celui-ci vaut $f(1, 0) = \frac{1}{2} < \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Puisque $f(x, y) = f(y, x)$, sur le côté $x = 0$, le maximum de f vaut également $\frac{1}{2}$.

★ Si $y = 1$, on a $f(x, 1) = \frac{x+1}{2(1+x^2)} = h(x)$.

On a $h'(x) = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2) - 2x(x+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{2(1+x^2)^2} = -\frac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{2(1+x^2)^2}$. Ainsi, $h'(x) \geq 0$ sur $[0, \sqrt{2}-1]$ et $h'(x) \leq 0$ sur $[\sqrt{2}-1, 1]$ donc h admet son maximum en $\sqrt{2}-1$ qui vaut

$$h(\sqrt{2}-1) = f(\sqrt{2}-1, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2(1+3-\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})} = \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{4} < \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Puisque $f(x, y) = f(y, x)$, le maximum de f sur les côtés $y = 1$ et $x = 1$ vaut $\frac{\sqrt{2}+1}{4} < \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Finalement, le maximum de f sur $[0, 1]^2$ est atteint en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et vaut $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 5. Le disque unité fermé est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Puisque c'est un fermé borné en dimension finie et que f y est continue, f est bornée sur D et y atteint ses bornes. Si un extremum de f appartient à la boule ouverte $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$, c'est un point critique de f .

• Cherchons alors les points critiques de f dans B . On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, le seul point critique de f est $(\frac{1}{2}, 0)$ et on a $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$.

En fait, f admet un minimum global en $(\frac{1}{2}, 0)$ qui vaut $-\frac{1}{4}$ car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \geq x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

• Si le maximum de f sur D était atteint dans B , ce serait un autre point critique de f dans B . Or, f admet un unique point critique, qui correspond à son minimum global. On en déduit que le maximum de f sur D est atteint sur le cercle unité $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

Étudions donc f sur C .

Pour tout $(x, y) \in C$, on a

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x = x^2 + 2(1 - x^2) - x = -x^2 - x + 2 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ainsi, le maximum de f sur C est atteint en $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ et celui-ci vaut

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$$

Le maximum de f sur D est donc atteint aux points $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ et vaut $\frac{9}{4}$.

Exercice 6.

1. Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On cherche toutes les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout $(x, y) \in U$,

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

(On remarque que ceci équivaut à dire que les vecteurs $\nabla f(x, y)$ et (x, y) sont colinéaires). On effectue un changement de variables en coordonnées polaires en posant pour tout $(r, \theta) \in V =]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

D'après la règle de la chaîne, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et on a pour tout $(r, \theta) \in V$,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \sin(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \cos(\theta) = 0$$

par hypothèse sur f .

On en déduit qu'il existe $\tilde{F} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(r, \theta) \in V$, $g(r, \theta) = \tilde{F}(r)$.

Or, si $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc

$$f(x, y) = \tilde{F}(\sqrt{x^2 + y^2}) = F(x^2 + y^2)$$

où F est définie sur $]0, +\infty[$ par $F(r) = \tilde{F}(\sqrt{r})$.

Réciproquement, on vérifie que si f est de la forme trouvée ci-dessus, avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $(x, y) \in U$,

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xyF'(x^2 + y^2) - 2xyF'(x^2 + y^2) = 0.$$

Les solutions de cette équation aux dérivées partielles sont donc exactement les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto F(x^2 + y^2)$$

avec $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On effectue le même changement de variables en coordonnées polaires qu'en question précédente, et on trouve cette fois grâce à la règle de la chaîne que, pour tout $(r, \theta) \in V$:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta)$$

puis, en multipliant par r et en utilisant l'hypothèse sur f :

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \sin(\theta) = \frac{1}{r^2 \cos^2(\theta)}$$

d'où

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{r^3 \cos^2(\theta)}.$$

En primitivant, on en déduit l'existence d'une fonction $\tilde{F} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(r, \theta) \in V$, $g(r, \theta) = -\frac{1}{2r^2 \cos^2(\theta)} + \tilde{F}(\theta)$.

Or, pour tout $(x, y) \in U$ et tout $(r, \theta) \in V$, on a

$$\begin{cases} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

donc pour tout $(x, y) \in U$,

$$f(x, y) = -\frac{1}{2x^2} + \tilde{F}(\arctan(\frac{y}{x})) = -\frac{1}{2x^2} + F\left(\frac{y}{x}\right)$$

où $F = \tilde{F} \circ \arctan$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, on vérifie que si f est de la forme trouvée ci-dessus avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \times \frac{1}{x^3} + x \times \frac{-y}{x^2} F'(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x} F'(\frac{y}{x}) = \frac{1}{x^2}.$$

Les solutions de cette équation aux dérivées partielles sont donc exactement les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto -\frac{1}{2x^2} + F\left(\frac{y}{x}\right)$$

où $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.