
Feuille d'entraînement (Corrigé)

Été 2026

Exercice 1: Détermination du terme général d'une suite

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -3$. Or, on montre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

En effet, $u_0 = 2 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$. Alors $3u_n + 1 > 1 > 0$ et $u_n + 3 > 3 > 0$ donc par quotient, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} > 0$, ce qui achève la récurrence.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

Initialisation: $u_0 = 2 \neq 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Initialisation: Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n \neq 1$. Montrons que $u_{n+1} \neq 1$.

Supposons par l'absurde que $u_{n+1} = 1$. On a

$$u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} = 1 \Leftrightarrow 3u_n + 1 = u_n + 3 \Leftrightarrow 2u_n = 2 \Leftrightarrow u_n = 1,$$

ce qui est absurde car contraire à l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $u_{n+1} \neq 1$, ce qui achève la récurrence.

On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

3. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 2}{u_n + 3}} = \frac{u_n + 3}{2u_n - 2}.$$

D'autre part,

$$2v_n + \frac{1}{2} = \frac{2}{u_n - 1} + \frac{1}{2} = \frac{4 + u_n - 1}{2(u_n - 1)} = \frac{u_n + 3}{2u_n - 2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{2}$.

5. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

Cherchons $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 2l + \frac{1}{2} \Leftrightarrow l = -\frac{1}{2}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - l = v_n + \frac{1}{2}$. On vérifie que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{2} = 2v_n + 1 = 2 \left(v_n + \frac{1}{2} \right) = 2w_n$$

donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n w_0 = 2^n \left(v_0 + \frac{1}{2} \right)$.

Or, $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n \times \frac{3}{2} = 2^{n-1} \times 3$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = w_n - \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = 2^{n-1} \times 3 - \frac{1}{2}.$$

6. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ donc $v_n \neq 0$ d'où

$$u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2^{n-1} \times 3 - \frac{1}{2}} + 1 = \frac{2^{n-1} \times 3 + \frac{1}{2}}{2^{n-1} \times 3 - \frac{1}{2}}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{n-1} \times 3 + \frac{1}{2}}{2^{n-1} \times 3 - \frac{1}{2}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{2^{n-1}(3 + \frac{1}{2^n})}{2^{n-1}(3 - \frac{1}{2^n})} = \frac{3 + (\frac{1}{2})^n}{3 - (\frac{1}{2})^n}$.

Or, puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \left(\frac{1}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \left(\frac{1}{2} \right)^n = 3$.

Par quotient, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + (\frac{1}{2})^n}{3 - (\frac{1}{2})^n} = \frac{3}{3} = 1$.

On en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$

Exercice 2: Une transformation du plan

1. (a) Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On note $z = re^{i\theta}$. Alors

$$z' = -\frac{1}{z} = e^{i\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{i\pi - i\theta}$$

$$\text{d'où } \boxed{z' = \frac{1}{r} e^{i(\pi - \theta)}}.$$

(b) Soit M , distinct de 0, appartenant au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1. Alors M est d'affixe $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et θ un réel. D'après la condition sur M , on sait que $r \in]0; 1[$.

D'après la question précédente, $z' = \frac{1}{r} e^{i(\pi - \theta)}$. Ainsi, $|z'| = \frac{1}{r}$. Or, $r \in]0; 1[$ donc $\frac{1}{r} \in]1; +\infty[$.

Autrement dit, $|z'| > 1$, donc $\boxed{M' \text{ est bien à l'extérieur du disque de centre } O \text{ et de rayon } 1}.$

2. (a) Le point K a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$. Une équation cartésienne du cercle Γ de centre K et de rayon $\frac{1}{2}$ est donc

$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2,$$

ce qui donne en développant

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4},$$

puis finalement

$$\boxed{x^2 + x + y^2 = 0.}$$

(b) Soit $z = x + iy$, avec x et y non tous les deux nuls. Alors

$$z' = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x + iy} = \frac{-x + iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2}$$

d'où $\boxed{z' = -\frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.}$

(c) Soit M un point du cercle Γ distinct de O . Notons $z = x + iy$ avec x et y non tous les deux nuls. Alors M' a pour affixe $z' = -\frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}$.

Or, M appartient à Γ donc vérifie $x^2 + x + y^2 = 0$. Autrement dit, $x^2 + y^2 = -x$, ce qui assure la non nullité de x .

Ainsi, $z' = -\frac{x}{-x} + i\frac{y}{-x} = 1 - i\frac{y}{x}$.

On en déduit que $\operatorname{Re}(z') = 1$, ce qui implique que $\boxed{M' \text{ appartient à la droite d'équation } x = 1.}$

Exercice 3: Géométrie

1. (a) Un système d'équations paramétriques de la droite est $\begin{cases} x = 1 - 7\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Un vecteur normal à la droite est $\vec{n} = (4, 7)$ donc il existe un réel c tel que $4x + 7y + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite. Puisque la droite passe par le point $A(1, 2)$, on a $4 \times 1 + 7 \times 2 + c = 0$ donc $c = -18$.

La droite admet donc pour équation cartésienne $4x + 7y - 18 = 0$.

- (b) Un vecteur directeur de la droite D est $\overrightarrow{AB} = (-6, 1)$. De plus, la droite passe par $A(1, 2)$ donc un système d'équations paramétriques de la droite D est $\begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Un vecteur normal à la droite D est $\vec{n} = (1, 6)$ donc il existe un réel c tel que $x + 6y + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite D . Puisque la droite passe par le point $A(1, 2)$, on a $1 + 2 \times 6 + c = 0$ donc $c = -13$.

La droite admet donc pour équation cartésienne $x + 6y - 13 = 0$.

- (c) Soit D' la droite d'équation $2x + y - 4 = 0$. Un vecteur normal à cette droite est $\vec{u} = (2, 1)$, qui est donc un vecteur directeur de D puisque D et D' sont perpendiculaires. Puisque D passe par $A(1, 2)$, un système d'équations paramétriques de (D) est $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Un vecteur normal à (D) est $\vec{n} = (-1, 2)$ donc il existe un réel c tel que $-x + 2y + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite D . Puisque D passe par $A(1, 2)$, on a $-1 + 2 \times 2 + c = 0$ donc $c = -3$.

La droite D admet donc pour équation cartésienne $-x + 2y - 3 = 0$.

- (d) Puisque $\vec{n} = (-7, 4)$ est un vecteur normal à la droite D , celle-ci admet une équation cartésienne de la forme $-7x + 4y + c = 0$. Puisqu'elle passe par le point $A(1, 2)$, on a $-7 + 4 \times 2 + c = 0$ donc $c = -1$.

La droite D admet donc pour équation cartésienne $-7x + 4y - 1 = 0$.

Un vecteur directeur de D est alors $\vec{u} = (4, 7)$ donc D admet pour système d'équations paramétriques: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 7\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

2. (a) La droite (AB) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$. On peut donc prendre comme base (ou vecteur directeur) de la droite le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

Une représentation paramétrique de la droite est alors $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. Il admet pour base $(\vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{v} = (1, -1, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan P donc

$$M(x, y, z) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 - (y - 2) = 0 \\ x - 1 - (z - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- (b) On a

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z - 4 = 0 &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z + 2 \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z + 2, z) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -\frac{3}{2}, 0) + z(0, -\frac{5}{2}, 1) + (0, 2, 0). \end{aligned}$$

Donc si on note $A(0, 2, 0) \in P$, on a

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x(1, -\frac{3}{2}, 0) + z(0, -\frac{5}{2}, 1) = \frac{x}{2}(2, -3, 0) + \frac{z}{2}(0, -5, 2)$$

donc on peut prendre comme base du plan P le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (2, -3, 0)$ et $\vec{v} = (0, -5, 2)$.

Une représentation paramétrique du plan P est alors

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda - 5\mu \\ z = 2\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- (c) Une base du plan P est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ où $\overrightarrow{AB} = (0, -3, -3) = -3(0, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2) = 2(1, 0, -1)$. On peut donc prendre comme base du plan P le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (0, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 0, -1)$.

une représentation paramétrique du plan P est alors

$$\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda - \mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons un vecteur normal au plan P , i.e. cherchons $\vec{n} = (a, b, c)$ tel que

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = c = -b.$$

Si on pose $a = 1$, on trouve $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Il existe donc un réel d tel qu'une équation cartésienne de P soit $x - y + z + d = 0$. Puisque le plan P passe par $B(1, -1, 0)$, on en déduit $d = -2$. Une équation cartésienne de P est alors $x - y + z - 2 = 0$.

(d) On a

$$\begin{cases} 3x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5x - 2 \\ z = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -5x - 2, -2x) = x(1, -5, -2) + (0, -2, 0)$$

donc la droite passe par le point $A(0, -2, 0)$ et admet pour base (i.e. pour vecteur directeur) $\vec{u} = (1, -5, -2)$. Une représentation paramétrique de la droite est alors

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(e) On a $(x, y, z) = (0, 1, z) = z(0, 0, 1) + (0, 1, 0)$ donc la droite D passe par le point $A(0, 1, 0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

Une représentation paramétrique de la droite D est alors $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

(f) La droite D passe par le point $A(-1, 0, 3)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1, -5)$.

Soit P le plan d'équation $2x - y - 5z = 0$. Il admet pour base $(\vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{v} = (1, 2, 0)$ et $\vec{w} = (0, 5, -1)$. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P donc

$$M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + 2y = 0 \\ 5y - (z - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 5y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

(g) Le plan P passe par le point $A(0, 1, -2)$ et admet pour base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1, -1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 2, 0)$.

Cherchons un vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ normal au plan P . On a alors

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2}b \\ a = -2b \end{cases}$$

Si on pose $b = 2$, on obtient $\vec{n} = (-4, 2, 3)$.

Il existe alors un réel d tel que P admet pour équation cartésienne $-4x + 2y + 3z + d = 0$. En utilisant les coordonnées du point $A(0, 1, -2) \in P$, on trouve $d = 4$.

Le plan P admet donc pour équation cartésienne $-4x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Exercice 4: Probabilités

1. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculons la probabilité que le test de H_i soit négatif. Ceci correspond au fait que les k prélèvements du groupe G_i soient négatifs. On peut supposer qu'ils sont indépendants et on obtient que cette probabilité vaut $(1 - p)^k$.

Ainsi, la probabilité que le test de H_i soit positif est $\boxed{1 - (1 - p)^k}$.

- (b) Posons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable aléatoire X_i égale à 1 si le test de H_i est positif, égale à 0 sinon.

D'après la question précédente, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^k$.

Ainsi, $X = \sum_{i=1}^n X_i$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes (parce que les groupes sont indépendants) suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^k$.

D'après le cours, X suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1 - (1 - p)^k)$, i.e.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - (1 - p)^k).$$

On a donc $\mathbb{E}(X) = n(1 - (1 - p)^k)$ et $V(X) = n(1 - (1 - p)^k)(1 - p)^k$.

2. (a) La variable aléatoire T désigne le nombre de tests effectués. On commence par tester tous les échantillons $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$, ce qui représente n tests. Ensuite, pour les $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que H_i est positif (il y en a X), on teste les k prélèvements du groupe G_i .

Ainsi, $T = kX + n$.

- (b) Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(T) = k\mathbb{E}(X) + n$ d'où $\mathbb{E}(T) = kn(1 - (1 - p)^k) + n$.

Enfin, puisque n est une constante, on a $V(T) = V(kX + n) = k^2V(X)$ d'où

$$V(X) = k^2n(1 - (1 - p)^k)(1 - p)^k.$$

3. (a) Le nombre $nk = N$ est le nombre total d'individus dans la population (et donc le nombre de tests qu'il aurait fallu effectuer si on avait voulu tester toute la population) et T est le nombre de tests effectués par cette méthode. La variable aléatoire $nk - T$ représente donc le nombre de tests économisés par cette méthode.

Toujours par linéarité de l'espérance, et puisque nk est une constante, on a

$$\mathbb{E}(nk - T) = nk - \mathbb{E}(T) = nk - kn(1 - (1 - p)^k) - n = nk(1 - p)^k - n$$

d'où $\mathbb{E}(nk - T) = n(k(1 - p)^k - 1)$.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = xe^{x \ln(q)} - 1$. La fonction f est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = e^{x \ln(q)} + \ln(q)xe^{x \ln(q)} = e^{x \ln(q)}(x \ln(q) + 1).$$

Puisque pour tout $x > 0$, $e^{x \ln(q)} > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x \ln(q) + 1$.

On a alors $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \ln(q) + 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\ln(q)}$ car $\ln(q) < 0$ puisque $q \in]0, 1[$.

On a donc le tableau de variation suivant pour la fonction f :

x	0	$-\frac{1}{\ln(q)}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	-1	$f(-\frac{1}{\ln(q)})$	-1

En effet, puisque $\ln(q) > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(q) = -\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(q)} = 0$ et par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x \ln(q)} = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

Par ailleurs, on a $f(0) = -1$ et la fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{\ln(q)}$ qui vaut

$$f\left(-\frac{1}{\ln(q)}\right) = -\frac{1}{\ln(q)}e^{-1} - 1.$$

(c) D'après la question 3.a), on a $\mathbb{E}(n_0 k_T) = n_0(k(1-p)^k - 1)$.

Puisqu $n_0 > 0$, cette quantité est maximale lorsque $k(1-p)^k - 1$ l'est. En posant $q = 1-p = 0,908$, ceci revient à trouver l'entier k pour lequel $f(k)$ est maximum.

D'après la question précédente, $k = \left\lfloor -\frac{1}{\ln(q)} \right\rfloor = 10$ ou $k = \left\lfloor -\frac{1}{\ln(q)} \right\rfloor + 1 = 11$.

Or, $f(10) \sim 2,809$ et $f(11) \sim 2,804$ donc la valeur optimale de k est $k = 10$.

Exercice 5: Une suite d'intégrales

1. On a $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$.

En réalisant une intégration par parties, on trouve:

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}.$$

De même,

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^1 + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx = -e^{-1} + 2(1 - 2e^{-1}) = 2 - 5e^{-1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de l'intégrale

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx.$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $x^n(x-1)e^{-x} \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$, ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1]$, $x^n e^{-x} \geq 0$ donc $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Ainsi, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

4. De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1]$, $x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^n e^{-1} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

i.e.

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit grâce au théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Problème: Maximisation d'aire

Partie I

1. La fonction f est dérivable sur $]0; 1]$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0; 1]$ et on a,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0; 1], f'(x) &= (1 - \ln(x))^2 - 2x \times \frac{1}{x}(1 - \ln(x)) \\ &= (\ln(x) - 1)(\ln(x) - 1 + 2)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall x \in]0; 1], f'(x) = (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1).}$

2. Par croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; 1]$, pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln(x) \leq \ln(1)$, donc pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln(x) \leq 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln(x) - 1 \leq -1 < 0$. D'autre part, en utilisant de nouveau la croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; 1]$, on a $\ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$.

Il s'ensuit que $(\ln(x) + 1)(\ln(x) - 1) \geq 0$ pour tout $x \in]0; e^{-1}]$ et $(\ln(x) + 1)(\ln(x) - 1) \leq 0$ pour tout $x \in [e^{-1}; 1]$.

Par conséquent, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0; e^{-1}]$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [e^{-1}; 1]$. On en déduit que la fonction f est croissante sur $]0; e^{-1}]$ et décroissante sur $[e^{-1}; 1]$.

Par ailleurs, on a $f(1) = 1(1 - \ln(1))^2 = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - 2\ln(x) + \ln(x)^2) = x - 2x \ln(x) + x \ln(x)^2.$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2x \ln(x) = 0$.

D'autre part, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln(x))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}^2))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2.$$

Posons $X = \sqrt{x}$. On a $X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 = 4 \lim_{X \rightarrow 0^+} (X \ln(X))^2 = 0$$

car $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0$.

Ainsi, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)^2 = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

On a le tableau de variations suivant:

x	0	e^{-1}	1
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$4e^{-1}$	1

La fonction f admet donc un maximum en e^{-1} qui vaut

$$f(e^{-1}) = e^{-1}(1 - \ln(e^{-1}))^2 = e^{-1}(1 - (-1))^2 = 4e^{-1}.$$

Partie II

1. Rappelons que pour tout $x \in]0; 1]$, $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Soit $a \in]0, 1]$.

L'équation de la tangente d_a est alors

$$y = \ln'(a)(x - a) + \ln(a) = \frac{x - a}{a} + \ln(a) = \frac{x}{a} + \ln(a) - 1.$$

On a $\frac{x}{a} + \ln(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = 1 - \ln(a) \Leftrightarrow x = a(1 - \ln(a))$ donc le point $N_a(a(1 - \ln(a)), 0)$ est le point d'intersection de d_a avec l'axe des abscisses.

Enfin, pour $x = 0$, on a $\frac{x}{a} + \ln(a) - 1 = \ln(a) - 1$ donc le point $P_a(0, \ln(a) - 1)$ est le point d'intersection de d_a avec l'axe des ordonnées.

2. Le triangle ON_aP_a est rectangle en O donc son aire vaut

$$\frac{ON_a \times OP_a}{2} = \frac{|a(1 - \ln(a))| \times |\ln(a) - 1|}{2} = \frac{|a| \times |1 - \ln(a)|^2}{2}.$$

Or, $a \in]0, 1]$ donc $a > 0$ et puisque $a < e$, $\ln(a) < \ln(e) = 1$ donc $1 - \ln(a) > 0$ d'où $|1 - \ln(a)| = 1 - \ln(a)$.

Finalement, on trouve bien que l'aire du triangle ON_aP_a vaut $A(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln(a))^2$.

3. On remarque que $A(a) = \frac{1}{2}f(a)$. Ainsi, $A(a)$ est maximale pour la valeur de a qui maximise $f(a)$. Or d'après, la question 2 de la partie I, $f(a)$ est maximal pour $a = e^{-1}$. Il en est donc de même pour A et l'aire maximale obtenue est

$$A(e^{-1}) = \frac{1}{2}f(e^{-1}) = 2e^{-1}.$$