
Feuille d'entraînement

Été 2026

Exercice 1 : Détermination du terme général d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
3. Justifier que l'on peut bien définir une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{2}$.
5. Déterminer l'expression de v_n pour tout entier naturel n .
6. En déduire l'expression de u_n pour tout entier naturel n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 : Une transformation du plan

On munit le plan complexe du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où O est le point du plan de coordonnées $(0, 0)$, $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On appelle f la fonction qui, à tout point M du plan distinct de O et d'affixe un nombre complexe z , associe le point M' d'affixe $z' = -\frac{1}{z}$.

1. (a) Soit $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel.
Donner la forme exponentielle de z' .
(b) En déduire que si un point M distinct de O appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque.
2. Soit Γ le cercle de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
 - (a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.
 - (b) Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y .
 - (c) Soit M un point du cercle Γ , distinct de O . Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3 : Géométrie

- Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques des droites suivantes.
 - La droite D passant par le point $A(1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-7, 4)$.
 - La droite D passant par les points $A(1, 2)$ et $B(-5, 3)$.
 - La droite D passant par $A(1, 2)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $2x + y - 4 = 0$.
 - La droite D passant par le point $A(1, 2)$ et à laquelle le vecteur $\vec{n} = (-7, 4)$ est normal.
- Donner pour chacun des objets suivants : un point et une base, une représentation paramétrique et une équation cartésienne.
 - La droite de l'espace passant par les points $A(1, 2, 3)$ et $B(4, 5, 6)$.
 - Le plan de l'espace d'équation cartésienne $3x + 2y + 5z - 4 = 0$.
 - Le plan de l'espace passant par les points $A(1, 2, 3)$, $B(1, -1, 0)$ et $C(3, 2, 1)$.
 - La droite de l'espace d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} 3x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}.$$
 - La droite de l'espace obtenue comme intersection des plans $x = 0$ et $y = 1$.
 - La droite de l'espace dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 - 5\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (g) Le plan de l'espace dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda + 2\mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4 : Probabilités

Une population de N individus est répartie en n groupes de k personnes chacun (donc $N = nk$). On suppose que dans cette population, la probabilité d'être porteur de Plasmodium falciparum (le parasite responsable de la forme la plus sévère du paludisme) est égale à $p \in]0, 1[$.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite.

Pour éviter d'effectuer N tests (un par individu), on procède de la manière suivante :

- pour chacun des N individus, on prélève un échantillon de sang et l'on répartit ces N prélèvements selon n groupes prédéfinis $G_1, G_2, \dots, G_n$ (chaque groupe contenant k prélèvements) ;
- pour chaque groupe G_i , on extrait du sang de chacun des k prélèvements que l'on mélange pour obtenir un échantillon H_i ;
- on teste tous les échantillons $H_1, H_2, \dots, H_n$: si le test de H_i est négatif, aucun des individus du groupe G_i n'est porteur du parasite et si le test H_i est positif, on teste un à un les k prélèvements du groupe G_i pour détecter les individus infectés.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i est positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués par cette méthode.

- Pour un groupe G_i donné, déterminer la probabilité que le test de H_i soit positif.
 - Reconnaître la loi de X , puis donner son espérance et sa variance.
- Exprimer T en fonction de n, k et X .

- (b) En déduire l'espérance et la variance de T en fonction de n et p .
3. (a) Que représente la variable aléatoire $nk - T$? Déterminer $\mathbb{E}(nk - T)$.
- (b) Soit $q \in]0, 1[$. Etablir le tableau de variation de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xq^x - 1 = xe^{x \ln(q)} - 1 \end{array} .$$

- (c) Dans la province d'Isfahan en Iran, la proportion d'individus infectés vaut $p = 0,092$. Pour des raisons techniques, le nombre de groupes n est préalablement fixé à une valeur $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur optimale de k (c'est à dire la valeur k pour laquelle $n_0 k - T$ est maximale en moyenne) ?

Exercice 5 : Une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
2. Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Problème : Maximisation d'aire

Dans tout le problème, on munit le plan $\mathbb{R}^2$ du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le point du plan de coordonnées $(0, 0)$, $\vec{i}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par $f(x) = x(1 - \ln(x))^2$.

1. Vérifier que f est dérivable sur l'intervalle $]0, 1]$ et montrer que pour tout $x \in]0, 1]$,

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)(\ln(x) - 1).$$

2. Etudier les variations de la fonction f , calculer sa limite en 0 puis dresser son tableau de variations. En déduire que f admet un maximum sur $]0, 1]$ que l'on précisera.

(Indication : pour calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)^2$, il pourra être utile d'écrire $x \ln(x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$.)

Partie II

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par $g(x) = \ln(x)$. Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a .

1. Vérifier que pour tout $a \in]0, 1]$, la droite d_a coupe l'axe des abscisses en un point N_a et l'axe des ordonnées en un point P_a . On précisera les coordonnées de ces deux points.
2. Montrer que pour tout $a \in]0, 1]$, l'aire du triangle $ON_a P_a$ vaut $A(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln(a))^2$ en unités d'aire.
3. Déterminer pour quel réel a l'aire $A(a)$ est maximale et donner la valeur de cette aire.