
DEVOIR MAISON N°1
A RENDRE POUR LE LUNDI 14 SEPTEMBRE 2026

Exercice 1. Sur l'île de Bôté se trouvent d'attachantes et étranges créatures : les Pomékon. Ces créatures sont d'autant plus étranges qu'elles parlent et comprennent le français et qu'elles ont un sens logique très affiné. Il y a deux sortes de Pomékon : les Pomékon de base, qui ne profèrent que des phrases qu'ils croient vraies, et les Pomékon évolués, qui au contraire ne disent que des choses qu'ils croient fausses. Ce que croient les Pomékon dépend de la qualité du dressage qu'ils ont reçu : les Pomékon bien dressés croient vraies les choses vraies et fausses les choses fausses ; c'est bien entendu l'inverse pour les Pomékon mal dressés, qui croient fausses les choses vraies et vraies les choses fausses. On notera ainsi qu'un Pomékon évolué et mal dressé, ayant des croyances erronées et une tendance irrépressible à dire le contraire de ce qu'il croit, ne dira que la vérité. Dans les énigmes ci-dessous, vous devez analyser logiquement les dires de quelques créatures de l'île de Bôté et en déduire leur stade d'évolution et la qualité du dressage qu'ils ont reçu.

Énigme 1. Pticachou : Je suis un Pomékon de base ou je suis bien dressé.

Énigme 2. Perspicouac : Je ne suis pas un Pomékon de base bien dressé.

Énigme 3. J'ai demandé à Roudoudou: Êtes-vous un Pomékon évolué mal dressé? Sa réponse me suffit à déterminer son niveau d'évolution et son niveau de dressage. Déterminez-les.

Énigme 4. Samalèche : Je suis un Pomékon de base si et seulement si je suis mal dressé.

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, E désigne un ensemble non vide.

On rappelle que si I est un ensemble, si on considère $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (où l'indice i parcourt les éléments de l'ensemble I), on a

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E .

- On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, c'est à dire $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(E)$. Autrement dit, $\mathcal{P}$ est un ensemble dont les éléments sont des parties de E .

On dit que $\mathcal{P}$ est un *pavage de E* si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, $\begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$.

On dit que le pavage $\mathcal{P}$ est *achevé* si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ croissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ (c'est à dire l'ensemble qui ne contient aucune partie de E), $\{\emptyset\}$ (c'est à dire l'ensemble qui contient une seule partie de E , à savoir $\emptyset$) et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages achevés de E .
2. Donner sans démonstration tous les pavages de E si $E = \{a\}$ ou $E = \{a, b\}$.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $E = \mathbb{N}$.

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\llbracket 0, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers naturels entre 0 et n .

(a) Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket = \mathbb{N}$.

(b) En déduire que $\mathcal{P} = \{\llbracket 0, n \rrbracket, n \in \mathbb{N}\}$ est un pavage non achevé de E .

4. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux pavages de E .

(a) L'union $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ?

(b) L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ?

5. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E .

(a) Montrer que l'ensemble des pavages achevés de E qui contiennent $\mathcal{P}$ est non vide.

On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'intersection de tous les pavages de cet ensemble.

(b) Justifier que $\widehat{\mathcal{P}}$ est lui-même un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.

(c) Réciproquement, montrer que si un pavage achevé contient $\mathcal{P}$, alors il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.

$\widehat{\mathcal{P}}$ est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.

On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le *pavage achevé engendré par* $\mathcal{P}$.

(d) A quelle condition a-t-on $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$?

6. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E . On note

$$\mathcal{P}_m = \{B \subset E, \forall A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E qui contient $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est achevé, alors $\mathcal{P}_m$ est achevé.