

TABLE DES MATIÈRES

2 Nombres réels	1
2.1 Introduction des nombres réels	1
2.1.1 Des entiers naturels aux nombres rationnels	1
2.1.2 De la nécessité d'un ensemble plus large	2
2.2 Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$	3
2.2.1 Intervalles	3
2.2.2 Valeur absolue	3
2.2.3 Exposants, racine carrée	7
2.2.4 Majorant, minorant, plus grand, plus petit élément	11
2.2.5 Borne supérieure, borne inférieure	12
2.2.6 Partie entière	14
2.3 Résolution d'équations et d'inéquations	15
2.3.1 Equations	15
2.3.2 Inéquations	18

2.1 Introduction des nombres réels

2.1.1 Des entiers naturels aux nombres rationnels

La définition de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est fondée sur les axiomes de Peano que nous ne présenterons pas ici. Il suffit de savoir que $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble contenant 0 et le successeur de chacun de ses éléments, i.e. si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}$. Finalement,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

C'est un ensemble infini dont le plus petit élément est 0.

Il est également stable par l'addition, c'est à dire que si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, alors $a + b \in \mathbb{N}$.

L'addition possède plusieurs propriétés :

- L'addition est une loi commutative, i.e. pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a + b = b + a$.
- L'addition est une loi associative, i.e. pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, alors

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

On s'autorise donc à noter ce nombre $a + b + c$.

- 0 est l'élément neutre pour l'addition, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 0 = 0 + n = n$.

En revanche, si $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il n'existe pas d'entier naturel dont la somme avec n est égale à 0. Rapidement, le besoin de recourir aux entiers négatifs se fait sentir et on introduit l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $-n$ est appelé l'opposé de n et vérifie $n + (-n) = -n + n = 0$, ce que l'on notera plus simplement

$$n - n = 0.$$

On étend la loi d'addition de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$; celle-ci conserve naturellement les mêmes propriétés, auxquelles s'ajoute une nouvelle : tout élément possède un opposé pour la loi $+$.

En plus de l'addition, on munit maintenant $\mathbb{Z}$ d'une deuxième loi, la multiplication, qui laisse $\mathbb{Z}$ stable et est elle aussi commutative, associative et qui a pour élément neutre 1.

$\mathbb{Z}$ est maintenant confronté au problème de l'inverse, le pendant du problème de l'opposé auquel était confronté $\mathbb{N}$: pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il n'existe pas forcément d'entier dont le produit avec n fasse 1. Pour trouver cet inverse, on doit introduire un nouvel ensemble, l'ensemble des nombres rationnels défini comme suit :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \frac{p}{q} &= \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q; & 2) \frac{p}{q} + \frac{p'}{q} &= \frac{p+p'}{q}; \\ 3) \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} &= \frac{pq' + p'q}{qq'}; & 4) \frac{p}{q} \frac{p'}{q'} &= \frac{pp'}{qq'}; \\ 5) \frac{1}{\frac{p}{q}} &= \frac{q}{p}; & 6) \forall n \in \mathbb{Z}, n \frac{p}{q} &= \frac{np}{q}. \end{aligned}$$

On a désormais bien $n \times \frac{1}{n} = 1$. Mais très vite, les mathématiciens vont s'apercevoir une fois de plus que ces nombres ne suffisent plus.

2.1.2 De la nécessité d'un ensemble plus large

Au Vème siècle avant J.-C., les Grecs découvrent que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 est un nombre irrationnel : c'est

$$\sqrt{2} \simeq 1,414...$$

Proposition 1: Irrationalité de $\sqrt{2}$

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Supposons par l'aburde que $\sqrt{2}$ est rationnel, i.e. il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Quitte à simplifier p et q par leur plus grand diviseur commun, on peut supposer p et q premiers entre eux.

En élevant au carré, on a $2 = \frac{p^2}{q^2}$ d'où $p^2 = 2q^2$. Ainsi, p^2 est pair, ce qui implique que p est pair. Il existe donc un entier naturel k tel que $p = 2k$.

Ainsi, $2q^2 = p^2 = 4k^2$, d'où $q^2 = 2k^2$, ce qui implique que q^2 est pair, donc q aussi.

Finalement, p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit le fait que p et q soient premiers entre eux.

$\sqrt{2}$ ne peut donc pas être rationnel. ■

Dés lors, cette découverte ouvre la perspective de l'existence d'autres nombres. Et pour cause, il y a dans la nature bien plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels... Citons par exemple $e \simeq 2,718281828...$ et $\pi \simeq 3,141592...$

2.2 Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$

On ne construira pas rigoureusement l'ensemble des nombres réels, ce serait bien trop compliqué et trop long ! Intuitivement, on peut penser que les nombres réels sont les limites de suites de nombres rationnels.

On a donc les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.2.1 Intervalles

Définition 1: Intervalles

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On définit les intervalles suivants :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, & [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, &]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \\]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}, &]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}, \\]b, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} | x > b\}, & [b, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} | x \geq b\}. \end{aligned}$$

Remarque 1. • Une définition équivalente est la suivante :

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset I$.

- On a $] - \infty, 0] = \mathbb{R}_-$, $] - \infty, 0[= \mathbb{R}_-^*$, $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$, $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et enfin $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- L'ensemble vide est un intervalle.
- L'intersection de deux intervalles est un intervalle ; en revanche l'union d'intervalles non vides d'intersection vide peut ne pas être un intervalle.

Exemple 1. • $[0, \sqrt{2}[\cap [1, \pi] = [1, \sqrt{2}[$.

- $[0, 1] \cup [3, 4]$ n'est pas un intervalle car cet ensemble contient 1 et 3 mais pas 2 qui est pourtant situé dans l'intervalle $[1, 3]$.

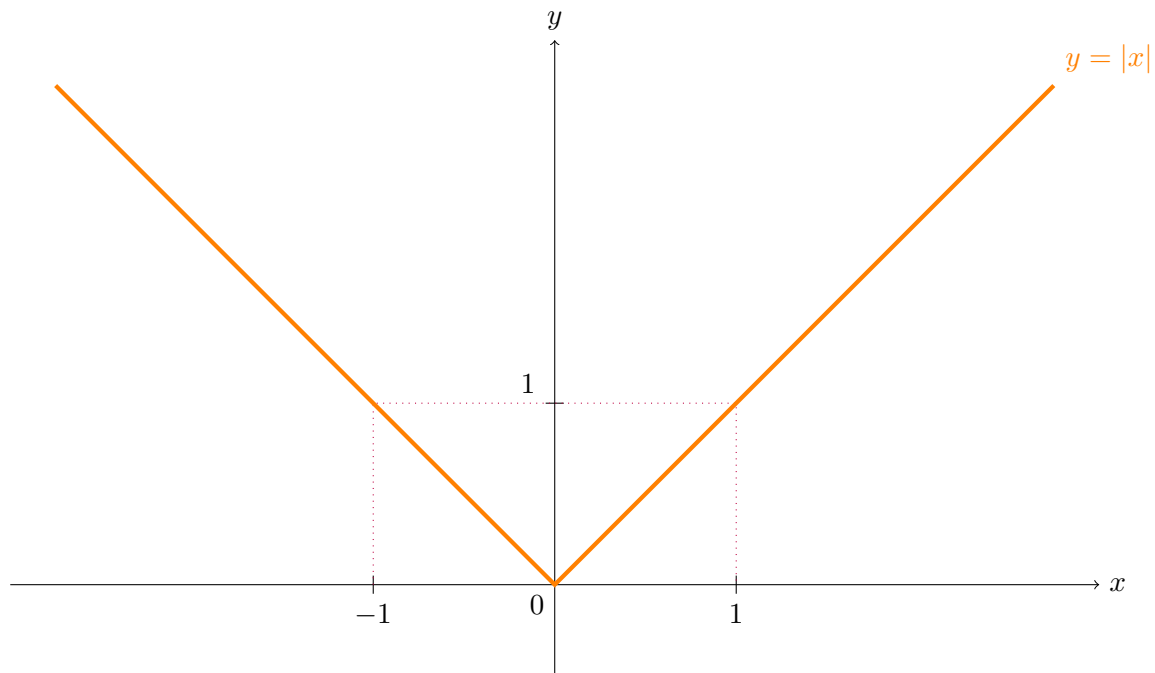
2.2.2 Valeur absolue

Définition 2: Valeur absolue

Soit x un nombre réel. On définit la valeur absolue de x , notée $|x|$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple 2. $|-3| = 3$.



Remarque 2. • La valeur absolue est donc une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

• Il découle de la définition que pour tout réel x , on a $|-x| = |x|$ et $-|x| \leq x \leq |x|$.

• Soit $y \geq 0$. On a $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$.

Supposons que $|x| \leq y$. Si $x \geq 0$, ceci implique que $x \leq y$ donc $-y \leq 0 \leq x \leq y$. Si $x \leq 0$, ceci implique que $-x \leq y$ d'où $y \geq 0 \geq x \geq -y$ et donc dans tous les cas $-y \leq x \leq y$.

Réciproquement, supposons que $-y \leq x \leq y$. Si $0 \leq x \leq y$, la valeur absolue étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $|x| \leq |y| = y$.

Si $-y \leq x \leq 0$, la valeur absolue étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on a $|x| \leq |-y| = y$.

Dans tous les cas, on a bien $|x| \leq y$, d'où l'équivalence.

• La négation de l'assertion précédente nous donne $|x| > y \Leftrightarrow x < -y$ ou $x > y$.

• On a de même $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$ et $|x| \geq y \Leftrightarrow x \leq -y$ ou $x \geq y$.

Proposition 2: Propriétés de la valeur absolue

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. (Positivité) Pour tout réel x , $|x| \geq 0$.
2. (Séparation) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. (Homogénéité) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x||y|$.
4. (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Démonstration.

1. • Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$.

• Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x \geq 0$.

2. L'implication $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$ est vraie par définition de la valeur absolue.

Supposons que $|x| = 0$. Si $x \geq 0$, alors $0 = |x| = x$. Si $x \leq 0$, alors $0 = |x| = -x$ donc $x = 0$.

Dans tous les cas, on obtient

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

d'où l'équivalence attendue.

3. Il y a quatre cas :

- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0$, $|x| = x$ et $|y| = y$ donc

$$|xy| = xy = |x||y|.$$

- Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \leq 0$, $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc

$$|xy| = -xy = |x||y|.$$

- Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$, $|x| = -x$ et $|y| = y$ donc

$$|xy| = -xy = |x||y|.$$

- Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$, $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|.$$

Dans tous les cas, on a bien $|xy| = |x||y|$.

4. • Si $x + y \geq 0$, on a

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

d'après la remarque ci-dessus. On a égalité si et seulement si $x = |x|$ et $y = |y|$, c'est à dire si et seulement si x et y sont tous deux positifs.

- Si $x + y \leq 0$, on a

$$|x + y| = -x - y \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|,$$

encore d'après la remarque ci-dessus. On a égalité si et seulement si $-x = |x|$ et $-y = |y|$, c'est à dire si et seulement si x et y sont tous deux négatifs.

Dans tous les cas, l'inégalité triangulaire est bien vérifiée avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe. ■

Corollaire 1

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$;
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| \leq |x| + |y|$.
3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$ et $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Démonstration.

1. D'après le troisième alinéa de la proposition précédente, on a

$$|y| \left| \frac{x}{y} \right| = \left| y \frac{x}{y} \right| = |x|.$$

Puisque $y \neq 0$, on peut diviser par $|y| \neq 0$, et on obtient $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

2. Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire au couple $(x, -y)$ et utiliser le fait que $|-y| = |y|$.

3. Etablissons la première inégalité.

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

d'où

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

En échangeant le rôle de x et y (qui jouent des rôles symétriques), on obtient

$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$

En combinant les deux inégalités, on trouve

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$$

ce qui équivaut au fait que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

La seconde inégalité découle de la première appliquée à $-y$.

■

Définition 3: Distance

Soient x et y deux nombres réels. On définit la distance de x à y , notée $d(x, y)$, le nombre

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Proposition 3: Propriétés de la distance

La distance vérifie les propriétés suivantes :

1. (Positivité) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) \geq 0$.
2. (Séparation) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. (Symétrie) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = d(y, x)$.
4. (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Remarque 3. La dernière inégalité justifie l'appellation « inégalité triangulaire » : en effet, si on appelle x, y, z les sommets d'un triangle, ceci signifie que la longueur de la base, qui est $d(x, y)$ est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Autrement dit, la distance la plus courte d'un point à un autre est la ligne droite !

Démonstration.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ par propriété de la valeur absolue.
2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

3. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a par propriété de la valeur absolue :

$$d(y, x) = |y - x| = |-(x - y)| = |x - y| = d(x, y).$$

4. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant l'inégalité triangulaire vérifiée par la valeur absolue, on a

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

■

2.2.3 Exposants, racine carrée

Définition 4

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On définit

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Remarque 4. • Ceci implique en particulier $0^0 = 1$.

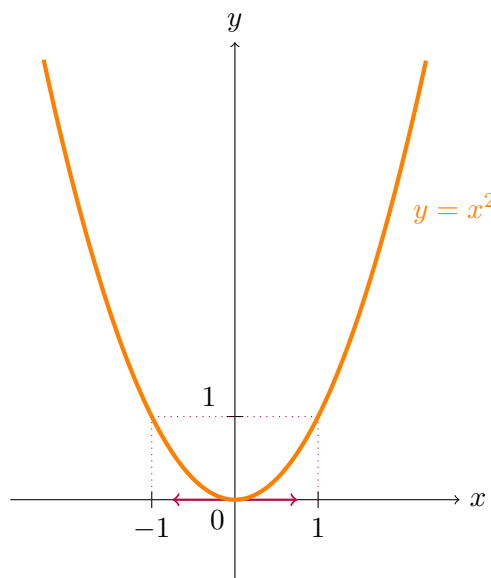
- On a donc défini x^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si $x \neq 0$.

Proposition 4: Propriétés des exposants

Soient $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Soient $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &1) (xy)^n = x^n y^n; & 2) x^n x^m = x^{n+m}; & 3) (x^n)^m = x^{nm}; \\ &4) \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}; & 5) \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \text{ si } x \neq 0. \end{aligned}$$

Rappelons que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.



Ainsi, pour tout réel x strictement positif, il existe deux réels, un strictement positif et un strictement négatif, dont les carrés sont égaux à x . Si $x = 0$, le seul nombre dont le carré est nul est 0 lui-même. Ceci légitime la définition suivante.

Définition 5: Racine carrée

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle racine carrée de x , et on note $\sqrt{x}$, l'unique réel positif dont le carré vaut x .

Exemple 3. $\sqrt{25} = 5$.

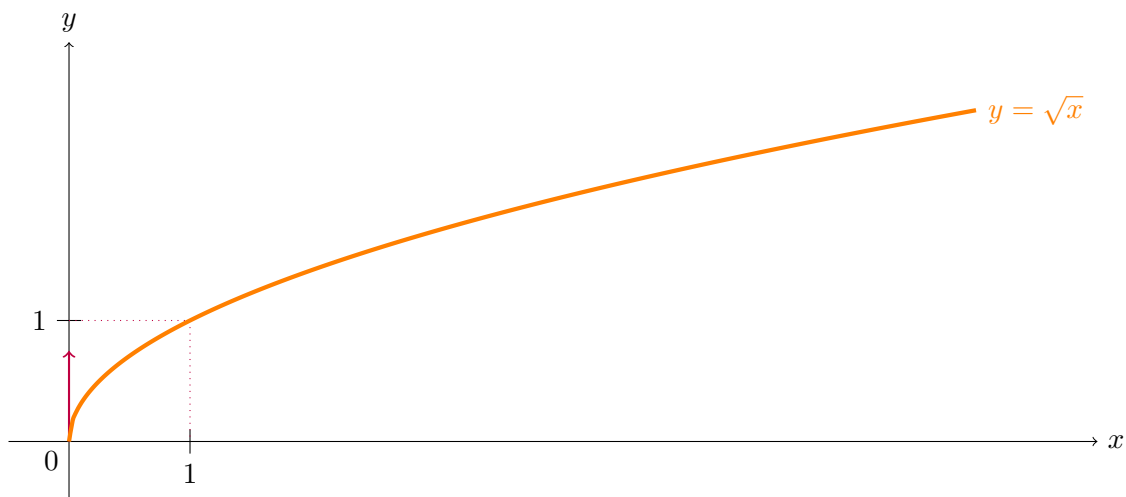
Remarque 5. • Par définition, on a donc pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$ et $(\sqrt{x})^2 = x$.

- Pour tout réel $a \geq 0$, on a l'équivalence

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}.$$

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (comme bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$), et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$



Proposition 5: Propriétés de la racine carrée

La racine carrée vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|;$
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n.$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n.$

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que puisque $x^2 \geq 0$, $\sqrt{x^2}$ est bien définie. Rappelons que $\sqrt{x^2}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut x^2 .

On a l'équivalence

$$y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x \quad \text{ou} \quad y = -x.$$

Donc $\sqrt{x^2}$ vaut x si x est positif, ou $-x$ si x est négatif, i.e. $\sqrt{x^2} = |x|$.

2. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. D'après les règles sur les puissances, on a

$$(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = xy.$$

Ainsi, $\sqrt{x}\sqrt{y}$ est un nombre positif dont le carré vaut xy . Par unicité de ce dernier, on en déduit que $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$.

Pour $n = 0$, on a $\sqrt{x^0} = \sqrt{1} = 1 = (\sqrt{x})^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$. D'après la propriété ci-dessus, on a

$$\sqrt{x^{n+1}} = \sqrt{x^n \times x} = \sqrt{x^n} \sqrt{x}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\sqrt{x^{n+1}} = (\sqrt{x})^n \sqrt{x} = (\sqrt{x})^{n+1},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

4. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. D'après le point 2), on a

$$\sqrt{y} \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{xy}{y}} = \sqrt{x}$$

donc en divisant par $\sqrt{y}$ (qui est non nul puisque $y \neq 0$), on obtient $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La propriété a déjà été prouvée pour $n \in \mathbb{N}$. Il reste à la montrer pour les entiers strictement négatifs.

Montrons donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{x^{-n}} = (\sqrt{x})^{-n}$.

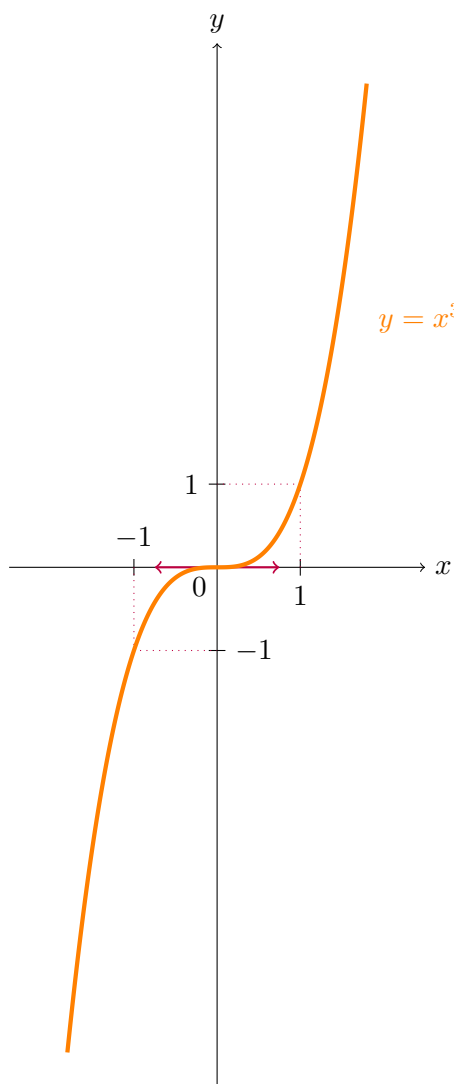
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'alinéa (3) à $\frac{1}{x}$, on obtient :

$$\sqrt{x^{-n}} = \sqrt{\frac{1}{x^n}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n = (\sqrt{x})^{-n}.$$

■

Exemple 4. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.



Ceci légitime la définition suivante.

Définition 6: Racine cubique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle racine cubique de x , et on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique nombre réel dont le cube vaut x .

Remarque 6. • Par définition, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt[3]{x})^3 = x$. On a de plus $\sqrt[3]{x^3} = x$.

• Contrairement à la fonction racine carrée, la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et peut prendre des valeurs négatives.

• Du fait des propriétés sur les puissances, la racine cubique vérifie des propriétés analogues à la racine carrée, à savoir :

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}, \sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, \sqrt[3]{x^n} = (\sqrt[3]{x})^n.$$

Exemple 5. $\sqrt[3]{-1} = -1$, $\sqrt[3]{27} = 3$.

Remarque 7. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme bijection réciproque de $x \mapsto x^3$) et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty.$$

Plus généralement, on peut définir la racine n -ème d'un nombre positif car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

Définition 7: Racine n -ème

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ème de x , et on note $\sqrt[n]{x}$, l'unique nombre positif dont la puissance n -ème vaut x .

Remarque 8. • Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note également $x^{\frac{1}{n}}$ pour $\sqrt[n]{x}$ de telle sorte que les règles sur les puissances soient respectées :

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n}n} = x^1 = x.$$

On peut donc définir les puissances rationnelles de tout nombre positif en posant pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{x})^p.$$

La question suivante est de définir x^α pour tout $x > 0$ et tout réel α . Par exemple, quel sens donner à $x^{\sqrt{2}}$? Nous répondrons à cette question dans un chapitre ultérieur.

2.2.4 Majorant, minorant, plus grand, plus petit élément

Définition 8

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de l'ensemble E si pour tout $x \in E$, $x \leq M$.
- Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est un minorant de l'ensemble E si pour tout $x \in E$, $m \leq x$.
- Soit $a \in E$. On dit que a est le plus grand élément (ou maximum) de E , et on note $a = \max(E)$, si pour tout $x \in E$, on a $x \leq a$.
- Soit $a \in E$. On dit que a est le plus petit élément (ou minimum) de E , et on note $a = \min(E)$, si pour tout $x \in E$, on a $a \leq x$.

Remarque 9. • On a bien unicité, si existence, du plus grand (resp. plus petit) élément de E . En effet, si E admet deux plus grands éléments a et b , alors par définition on a $a \leq b$ (puisque b est le plus grand élément de E) et $b \leq a$ (puisque a est le plus grand élément de E) donc $a = b$. (On traite de même le cas du plus petit élément.)

- Un majorant (resp. un minorant) de E n'appartient pas nécessairement à E .
- Le plus grand (resp. le plus petit) élément de E est un majorant (resp. minorant) de E qui appartient à E .

Exemple 6. Soit $E = \{-1, 1, 3\}$.

- $3; \pi; 1715$ sont des majorants de E . Plus généralement, l'ensemble des majorants de E est $[3, +\infty[$.
- $-1; -\sqrt{2}; -37,5$ sont des minorants de E . Plus généralement, l'ensemble des minorants de E est $] -\infty, -1]$.
- 3 est le plus grand élément de E .
- -1 est le plus petit élément de E .

Définition 9: Partie bornée

Une partie de $\mathbb{R}$ non vide est dite bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple 7. • L'ensemble $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est borné.

- L'intervalle $] -\infty, 1]$ n'est pas borné.

Proposition 6

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

Alors l'ensemble E est borné si et seulement si il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $|x| \leq r$.

Démonstration. • Supposons que E est borné. Alors il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in E$,

$$m \leq x \leq M.$$

Soit $r = \max(|m|, |M|)$. On a les inégalités

$$-r \leq -|m| \leq m \leq x \leq M \leq |M| \leq r$$

d'où $|x| \leq r$.

- Réciproquement, supposons qu'il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $|x| \leq r$, i.e.

$$\forall x \in E, -r \leq x \leq r.$$

Ainsi, r est un majorant de E et $-r$ un minorant de E , donc E est borné. ■

2.2.5 Borne supérieure, borne inférieure

Certaines parties de $\mathbb{R}$ n'admettent pas de plus grand (ou de plus petit) élément, comme l'intervalle $]0, 1[$. Néanmoins, cet intervalle admet une borne supérieure, et une borne inférieure. La proposition suivante découle de la construction des nombres réels; nous ne la démontrerons donc pas et l'utiliserons comme axiome.

Proposition 7: Axiome de la borne supérieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée.

Alors E admet un plus petit majorant : on appelle ce réel la borne supérieure de E et on le note $\sup(E)$.

Remarque 10. On convient que $\sup(E) = +\infty$ si E n'est pas majorée.

Exemple 8. $\sup([0, 1]) = 1$. En effet, 1 est un majorant de $[0, 1]$ et tout nombre strictement inférieur à 1 n'est pas un majorant de $[0, 1]$ car pour tout $x < 1$, il existe $a \in [0, 1]$ vérifiant $x < a \leq 1$.

En revanche, $[0, 1]$ n'admet pas de plus grand élément.

Proposition 8: Caractérisation de la borne supérieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\alpha = \sup(E)$;

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E, x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha. \end{array} \right.$$

Démonstration. La deuxième assertion exprime exactement le fait que α est le plus petit majorant de E : en effet, la première ligne du système assure que α est un majorant de E et la deuxième ligne que tout nombre plus petit que α n'est pas un majorant de E . ■

Remarque 11. Soit E une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Si E admet un plus grand élément a , alors $a = \sup(E)$.

En effet, a est bien un majorant de E . De plus, soit $\varepsilon > 0$. Il existe bien un élément x de E tel que

$$a - \varepsilon < x \leq a :$$

il suffit de prendre $x = a$.

Réciproquement, supposons que $\sup(E) \in E$. Alors pour tout $x \in E, x \leq \sup(E)$ donc $\sup(E) = \max(E)$.

En conclusion : $\sup(E) \in E$ si et seulement si E admet un plus grand élément, qui est nécessairement $\sup(E)$.

Exemple 9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors :

$$\sup([a, b]) = \sup(]a, b]) = \sup([a, b]) = \sup(]a, b]) = \sup(]-\infty, b]) = \sup(]-\infty, b]) = b.$$

Proposition 9: Borne inférieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée.

Alors E admet un plus grand minorant : on appelle ce réel la borne inférieure de E et on le note $\inf(E)$.

Remarque 12. On convient que $\inf(E) = -\infty$ si E n'est pas minorée.

Démonstration. Par hypothèse, E est minorée donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E, m \leq x$.

Alors l'ensemble $-E = \{-x | x \in E\}$ est non vide et majoré par $-m$: en effet, pour tout $x \in E, -x \leq -m$.

L'ensemble $-E$ admet donc une borne supérieure. Notons $\alpha = \sup(-E)$. Montrons que $-\alpha = \inf(E)$.

Puisque α est un majorant de $-E$, on a pour tout $x \in E, -x \leq \alpha$ d'où $-\alpha \leq x$, donc $-\alpha$ est un minorant de E .

Montrons que $-\alpha$ est le plus grand minorant de E . Soit β un minorant de E .

On a pour tout $x \in E, \beta \leq x$ donc $-x \leq -\beta$, i.e. $-\beta$ est un majorant de $-E$. Puisque α est le plus petit majorant de $-E$, on a nécessairement $\alpha \leq -\beta$, d'où $\beta \leq -\alpha$.

Ainsi, $-\alpha$ est plus grand que tous les minorants de E : c'est donc le plus grand minorant de E , ce qui implique que $-\alpha = \inf(E)$. ■

Remarque 13. On a montré au passage que si E est non vide et minoré,

$$\sup(-E) = -\inf(E).$$

On a de même, si E est majoré, $\inf(-E) = -\sup(E)$.

La borne inférieure vérifie donc les mêmes propriétés que la borne supérieure :

Proposition 10: Caractérisation de la borne inférieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\alpha = \inf(E)$;

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E, \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \alpha \leq x < \alpha + \varepsilon \end{array} \right.$$

Remarque 14. Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. Si $\inf(E) \notin E$, alors E n'admet pas de plus petit élément.

On a l'équivalence : $\inf(E) \in E$ si et seulement si E admet un plus petit élément, qui est nécessairement $\inf(E)$.

Exemple 10. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors :

$$\inf([a, b]) = \inf(]a, b]) = \inf([a, b[) = \inf(]a, b[) = \inf([a, +\infty[) = \inf(]a, +\infty[) = a.$$

2.2.6 Partie entière

Commençons par un lemme, utile en soi, qui est en fait une propriété essentielle de $\mathbb{Z}$.

Lemme 1

Soit $E \subset \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée.

Alors E admet un plus grand élément.

Démonstration. E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure $\sup(E)$. Montrons que $\sup(E) \in E$.

Supposons que $\sup(E) \notin E$. Alors par propriété de la borne supérieure, il existe $x \in E$ tel que

$$\sup(E) - 1 < x < \sup(E).$$

Puisque $x < \sup(E)$, x n'est pas un majorant de E donc il existe $y \in E$ tel que

$$\sup(E) - 1 < x < y < \sup(E).$$

Puisque $E \subset \mathbb{Z}$, x et y sont des entiers donc $y - x$ est un entier et cet entier vérifie :

$$0 < y - x < 1,$$

ce qui est absurde car il n'existe pas d'entier strictement compris entre 0 et 1.

On a donc nécessairement $\sup(E) \in E$. ■

Remarque 15. On montre de même que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Proposition 11: Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1.$$

On appelle cet entier partie entière de x , et on le note $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration. Montrons d'abord l'existence de la partie entière de x .

Soit $E = \{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$. Tout d'abord, E est non vide, sinon on aurait $n > x$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui impliquerait que $\mathbb{Z}$ est minoré et mènerait à une absurdité.

D'autre part, E est majoré par x . C'est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$: elle admet donc un plus grand élément, que l'on note $\lfloor x \rfloor$.

Puisque $\lfloor x \rfloor \in E$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$. D'autre part, puisque $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand élément de E , alors $\lfloor x \rfloor + 1 \notin E$, i.e. $\lfloor x \rfloor + 1 > x$.

L'entier $\lfloor x \rfloor$ satisfait donc la propriété attendue. Montrons que c'est le seul.

Supposons qu'il existe deux entiers n et m tels que

$$\begin{cases} n \leq x < n + 1 \\ m \leq x < m + 1. \end{cases}$$

Ceci implique que $m < n + 1$ donc $m \leq n$. Par symétrie, on a de même $n \leq m$ d'où $n = m$, ce qui assure l'unicité de la partie entière de x . ■

Exemple 11. $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Remarque 16. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et on a l'équivalence :

$$\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 12: Propriétés de la partie entière

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$. De plus, elle est discontinue en tous les entiers relatifs : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n$.

Démonstration. Soient x et y deux réels avec $x \leq y$.

On a $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Or, $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$ implique que $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$, d'où la croissance de la fonction partie entière.

D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \lfloor x \rfloor$ donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$.

Enfin, soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction partie entière est constante égale à $n - 1$ sur $[n - 1, n[$ et constante égale à n sur $[n, n + 1[$ donc les limites en découlent. ■

2.3 Résolution d'équations et d'inéquations

2.3.1 Equations

Rappelons les méthodes de résolution des équations de degré 1 et 2 :

Proposition 13: Equations du premier degré

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

L'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution $x = -\frac{b}{a}$.

Proposition 14: Trinômes du second degré

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$.

On appelle discriminant de l'équation (E) le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Il y a trois cas :

- Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles (ou racines) distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une seule solution (ou racine double)

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet pas de solution réelle.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

(A ce stade, on a mis le trinôme sous forme canonique.) Il y a donc trois cas :

- Si $\Delta > 0$, on peut factoriser :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, on a

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Puisque $a \neq 0$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \neq 0,$$

ce qui implique que l'équation (E) n'a pas de solution réelle. ■

Remarque 17. Grâce à la forme canonique, on obtient que :

• si $a > 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ obtenu en $x = -\frac{b}{2a}$ et vaut $-\frac{\Delta}{4a}$;

• si $a < 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ obtenu en $x = -\frac{b}{2a}$ et vaut $-\frac{\Delta}{4a}$;

On a également démontré le corollaire suivant :

Corollaire 2

Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. Supposons que $\Delta \geq 0$. Notons x_1 et x_2 les racines de (E) (avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas où $\Delta = 0$).

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

La formule factorisée ci-dessus implique les deux corollaires suivants :

Corollaire 3: Signe d'un trinôme du second degré

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines : i.e. si on note $x_1 < x_2$ les racines de P , alors $P(x)$ est du signe de a si $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$ et du signe opposé si $x_1 \leq x \leq x_2$ (et s'annule en x_1 et en x_2).
2. Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est toujours du signe de a (et s'annule une seule fois en la racine double du trinôme).
3. Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a et ne s'annule jamais.

Démonstration.

1. Si $\Delta > 0$, on a $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ si $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$ et $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ si $x_1 \leq x \leq x_2$. Le résultat en découle en multipliant par a .
2. Si $\Delta = 0$, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$. Le résultat en découle en multipliant par a .

3. Si $\Delta < 0$, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Encore une fois, le résultat en découle en multipliant par a .

Corollaire 4: Relations coefficients-racines

Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. Supposons que $\Delta \geq 0$. Notons x_1 et x_2 les racines de (E) (avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas où $\Delta = 0$).

On a les relations suivantes entre les coefficients et les racines du trinôme :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de développer la forme factorisée : on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$$

Par identification des coefficients, (par exemple en prenant $x = 0$ puis $x = 1$) on a

$$\begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c. \end{cases}$$

d'où les formules attendues en divisant par $a \neq 0$. ■

Remarque 18. Réciproquement, si on cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où S et P sont deux réels, alors les solutions sont les racines du trinôme $x^2 - Sx + P$.

En effet, le système équivaut à

$$\begin{cases} y = S - x \\ x(S - x) = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x \\ x^2 - Sx + P = 0. \end{cases}$$

2.3.2 Inéquations

Rappelons avant toute chose quelques règles élémentaires sur les inégalités :

Proposition 15

Soient a et b deux réels. On a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$.
2. • Si $x > 0$, $a \leq b \Leftrightarrow ax \leq bx$;
• si $x < 0$, $a \leq b \Leftrightarrow ax \geq bx$.
3. • Si $0 < a \leq b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$;
• Si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$;
• Si $a < 0 < b$, alors $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$.

Enfin, signalons les propriétés suivantes, utiles pour résoudre des inéquations :

Proposition 16

1. $\bullet \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow x \leq y;$
 $\bullet \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_-)^2, x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow y \leq x;$
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow x \leq y;$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y.$
4. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(x) \leq \ln(y) \Leftrightarrow x \leq y.$