

Liste d'exercices n°2

Nombres réels

Exercice 1. Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On définit :

- la moyenne arithmétique de x et y par $m = \frac{x+y}{2}$;
- la moyenne géométrique de x et y par $g = \sqrt{xy}$;
- la moyenne harmonique de x et y par $h = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right]^{-1}$.

Montrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

Exercice 2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } y \geq x \end{cases} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } y \leq x. \end{cases}$$

1. Montrer que $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
2. Montrer que $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = -\min(x, 0)$.
Montrer que $x^+ \geq 0, x^- \geq 0, x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant l'équation ou les inégalités suivantes :

1. $|x| = |y|$,
2. $|x| + |y| = 1$,
3. $|x| - |y| = 2$,
4. $|xy| = 2$,
5. $|x| \leq |y|$,
6. $|x| + |y| \leq 1$,
7. $|x| - |y| \leq 2$,
8. $|xy| \geq 2$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x < |x - 1|$,
2. $x < -|x - 1|$,
3. $x^2 < |x - 1|$,
4. $x^2 < -|x - 1|$,
5. $x^2 < |x - \frac{1}{4}|$,
6. $|x - 5| < |x - 1|$,
7. $1 < |x - 2| \leq 3$,
8. $|x + 2| |x - 2| > 4$,
9. $|x - 1| < |x|$,
10. $|x| + |x + 1| < 2$.
11. $\max\{|x^2 - 2|, |x - 3|\} \leq 1$.
12. $|x - 1| + |x + 1| \geq 1$.

Exercice 5. Représenter le graphe de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto |x + 1| - |x| + |x - 1|$.

Exercice 6. Prouver que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x|(1 + |x|)^{-1}$, est sous-additive, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 7. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer si elle est majorée, minorée et, le cas échéant, calculer ses bornes inférieure et supérieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$.

1. $[-1, 1]$
2. $] -1, 1] \cup \{2\}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$
6. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
7. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$
8. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$
9. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{1+n^2} \right\}$
10. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ 3 + \frac{2}{n} \right\}$
11. $\bigcup_{n \geq 2} \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n-1} \right\}$
12. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{n^2+1}{n+1} \right\}$
13. $\bigcup_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m > n} \left\{ \frac{m}{n} \right\}$
14. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 3\}$
15. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < x^2\}$
16. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad (x = \frac{t+1}{t^2+1}) \wedge (t \in]-2, 5]) \right\}$
17. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad x = \frac{t}{t^2+1} \right\}$
18. $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad x = \sin(t)\}$
19. $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad x = t^2\}$
20. $\{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} \geq -3\}$
21. $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (x = st) \wedge (|s| + |t| \leq 1)\}$
22. $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (x = st) \wedge (s^2 + t^2 \leq 1)\}$.

Exercice 8. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides majorées. On note $A + B$ (resp. $A \cdot B$) l'image de $A \times B$ par l'addition (resp. la multiplication) : $A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B \quad x = a + b\}$ et $AB = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B \quad x = ab\}$.

1. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ et que, si $A \cap B \neq \emptyset$, $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$, cette dernière inégalité pouvant être stricte.

2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
3. Montrer que $(\sup A)(\sup B) = \sup(AB)$ si $A \subseteq \mathbb{R}_+$ et $B \subseteq \mathbb{R}_+$.
4. Déterminer des parties A, B de $\mathbb{R}$ pour lesquelles $(\sup A)(\sup B) < \sup(AB)$.

Exercice 9. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée. Soit $B = \{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$.
Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 10. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante.

Montrer que f admet un point fixe sur $[0, 1]$, i.e. il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Indication : Considérer $\inf\{x \in [0, 1], f(x) \leq x\}$.

Exercice 11. Résoudre l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

3. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 13. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \emptyset$.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $q > \frac{1}{y-x}$.

(a) Soit $m = \lfloor qx \rfloor$. Montrer que $x < \frac{m+1}{q} < y$.

(b) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Décrire chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes à l'aide d'intervalles réels :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x < 2\}$,
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ et } x^2 + x - 6 < 0\}$,
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < x^2 - 12 < 4x\}$,
5. $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mid \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R}\}$,
6. $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \mid \frac{x-2}{x+3} < 0\}$,
7. $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \mid \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$,
8. $\{x \in \mathbb{R} \mid (2x+1)^6(x-1) \geq 0\}$.
9. $\{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)^3(x-3)^7 \geq 0\}$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes de deux équations suivants :

1.

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y = m \\ xy = 1 \end{cases} \quad (\text{Discuter selon les valeurs de } m.)$$

Exercice 16. Soit m un paramètre réel. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$e^x + me^{-x} - m - 1 = 0.$$

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1.

$$\sqrt{x+7} = 5 - x.$$

2.

$$\sqrt{-2x+4} - \sqrt{x^2-3} = 0.$$

3.

$$x + \sqrt{2x+1} = 1.$$