6 Trigonométrie

Etymologiquement, le terme trigonométrie vient du grec « trigonos »(triangulaire) et « metron »(mesure). Comme son nom l'indique, le but de ce domaine est donc d'établir des relations entre les longueurs des côtés d'un triangle et les mesures des angles de celui-ci.

Dans tout le chapitre, on adoptera la notation suivante : pour tous réels a, b, c, on dit que a est congru à b modulo c, et on note $a \equiv b[c]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $a - b = kc$.

6.1 Fonctions circulaires

6.1.1 Cercle trigonométrique

Définition 1

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle cercle trignonométrique le cercle orienté de centre O et de rayon 1.

• Pour tout réel $\theta \in [0, 2\pi[$, il existe un unique point $M(\theta)$ sur le cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM(\theta)}})$ soit égal à θ.

On définit alors le cosinus de l'angle θ, noté $\cos(\theta)$, comme l'abscisse du point $M(\theta)$ et le sinus de l'angle θ, noté $\sin(\theta)$, comme l'ordonnée du point $M(\theta)$

Si $\cos(\theta) \neq 0$, autrement dit si $\theta \notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, on définit la tangente de l'angle θ, notée $\tan(\theta)$, par $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

• Pour tout réel x, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x \equiv \theta[2\pi]$.

On définit alors le cosinus et le sinus de x par les égalités

$$\cos(x) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(\theta).$$

Si $\cos(x) \neq 0$, autrement dit si $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, on définit la tangente de x par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Remarque 1. Par définition, pour tout réel x, on a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

Remarque 2. Sur la figure, on retrouve dans le triangle rectangle $OAM(\theta)$ les propriétés bien connues suivantes (en utilisant le fait que $OM(\theta) = 1$) :

$$\cos(\theta) = OA = \frac{OA}{OM(\theta)} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}},$$

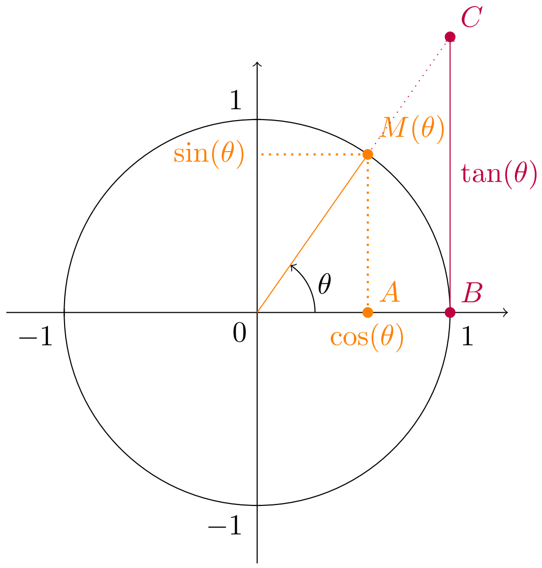


FIGURE 6.1 – Les fonctions circulaires, vues sur le cercle trigonométrique

et

$$\sin(\theta) = AM(\theta) = \frac{AM(\theta)}{OM(\theta)} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

Dans le cas où $\tan(\theta)$ est bien définie, on a alors

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \frac{AM(\theta)}{OA} = \frac{BC}{OB} = BC,$$

où l'avant-dernière égalité découle du théorème de Thalès.

Ceci justifie la terminologie « tangente » : la tangente d'un angle est la longueur (algébrique) du segment obtenu en parcourant la tangente au cercle trigonométrique du point $(1,0)$ jusqu'au point d'intersection avec la droite $(OM(\theta))$.

Définition 2

Pour tout point M du cercle trigonométrique, il existe un unique réel $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}) = \theta$.

Ce réel $\theta \in]-\pi,\pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$.

Les principaux angles avec leurs mesures principales sont ceux sur la figure 2.

Remarque 3. On voit sur la figure les propriétés suivantes :

- $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi]$; • $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv \pi[2\pi]$; • $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$;
- $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; • $\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; • $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$.
- Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
- Si $x \in [0, 2\pi[, \sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\pi]$ et $\sin(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi, 2\pi[$.

6.1.2 Propriétés

Tout d'abord, citons la relation fondamentale de la trigonométrie.

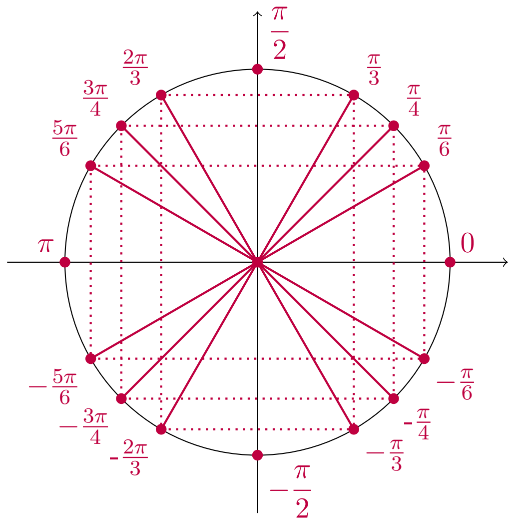


Figure 6.2 – Les principaux angles avec leurs mesures principales

Proposition 1: Relation fondamentale de la trigonométrie

Pour tout réel x, on a
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Démonstration. Soit θ l'unique réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $x \equiv \theta[2\pi]$.

Reprenons la figure 1. Dans le triangle rectangle $OAM(\theta)$, on a d'après le théorème de Pythagore :
$$OA^2 + AM(\theta)^2 = OM(\theta)^2 = 1$$
d'où $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, i.e. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. ■

Une aute propriété importante est la périodicité.

Proposition 2: Périodicité des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

Démonstration. Ceci découle de la définition du cosinus et du sinus. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{Z}$.

Posons $y = x + 2k\pi$. Soit θ l'unique réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $x \equiv \theta[2\pi]$. Par définition, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \theta + 2k'\pi$, d'où $y = \theta + 2(k + k')\pi$ avec $k + k' \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $y \equiv \theta[2\pi]$ donc θ est l'unique réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $y \equiv \theta[2\pi]$. Dans ces conditions, on a bien
$$\cos(y) = \cos(x) = \cos(\theta)$$
et
$$\sin(y) = \sin(x) = \sin(\theta).$$
■

Proposition 3: Parité et symétries

1. La fonction cosinus est paire et les fonctions sinus et tangente sont impaires, i.e.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \forall x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(-x) = -\tan(x).$$
2. $$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
et
$$\forall x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(\pi - x) = -\tan(x).$$
3. $$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi + x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
et
$$\forall x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(\pi + x) = \tan(x).$$
En particulier, ceci signifie que la fonction tangente est π-périodique.
4. $$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
et
$$\forall x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right], \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}.$$
5. $$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$
et
$$\forall x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right], \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le point $M(x)$ du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$.

1. Le point $M(-x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM(-x)}}) \equiv -x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie d'axe $(O, \vec{i})$.
Ainsi, les coordonnées de $M(-x)$ sont $(\cos(x), -\sin(x))$, ce qui implique que
$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x).$$
On en déduit que si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.
2. Le point $M(\pi - x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM(\pi - x)}}) \equiv \pi - x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie d'axe $(O, \vec{j})$.
Ainsi, les coordonnées de $M(\pi - x)$ sont $(-\cos(x), \sin(x))$, ce qui implique que
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin(x).$$
On en déduit que si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$.
3. Le point $M(\pi + x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM(\pi + x)}}) \equiv \pi + x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie de centre O.

Ainsi, les coordonnées de $M(\pi+x)$ sont $(-\cos(x), -\sin(x))$, ce qui implique que

$$\cos(\pi+x) = -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi+x) = -\sin(x).$$

On en déduit que si $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(\pi+x) = \dfrac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.

4. Le point $M(\frac{\pi}{2}-x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM(\frac{\pi}{2}-x)}}) \equiv \frac{\pi}{2} - x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie d'axe la première bissectrice.
   Ainsi, les coordonnées de $M(\frac{\pi}{2}-x)$ sont $(\sin(x), \cos(x))$, ce qui implique que
   $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x).$$
   On en déduit que si $x \not\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{1}{\tan(x)}$.
5. On applique les formules précédentes en remplaçant x par $-x$ et on obtient
   $$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \sin(-x) = -\sin(x)$$
   et
   $$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \cos(-x) = \cos(x).$$
   On en déduit que si $x \not\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \dfrac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\dfrac{1}{\tan(x)}$.

■

Proposition 4: Formules d'addition

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
5. Si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, alors $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;
6. Si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $a-b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

Démonstration. • Soient $M(a)$ et $M(b)$ les points du cercle trigonométrique de coordonnées respectives $(\cos(a), \sin(a))$ et $(\cos(b), \sin(b))$.

On a alors
$$\overrightarrow{OM(a)} \cdot \overrightarrow{OM(b)} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Par ailleurs, on a également

$$\overrightarrow{OM(a)} \cdot \overrightarrow{OM(b)} = OM(a) \times OM(b) \times \cos\left((\widehat{\overrightarrow{OM(a)}, \overrightarrow{OM(b)}})\right) = \cos(b-a).$$

Ceci prouve que

$$\cos(a-b) = \cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

• En remplaçant b par $-b$, on obtient

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

• On en déduit que

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)\\ &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).\end{aligned}$$

• Ensuite, en remplaçant b par $-b$, on trouve

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

• Ainsi, si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi], b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(a)\cos(b)(\tan(a)+\tan(b))}{\cos(a)\cos(b)(1-\tan(a)\tan(b))}$$

d'où $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

• Enfin, si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi], b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, en remplaçant b par $-b$ dans la formule précédente, on obtient par imparité de la fonction tangente :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)+\tan(-b)}{1-\tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

■

Remarque 4. On en déduit d'autres formules qui peuvent être pratiques : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)),$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

et

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

Corollaire 1: Formules de duplication

Pour tout réel a, on a :

1. $$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a).$$

2. $$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

3. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a \not\equiv \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, alors

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Démonstration.

1. D'après les formules d'addition, on a
$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a).$$
En utilisant le fait que $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, on trouve
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1.$$
En utilisant le fait que $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$, on trouve
$$\cos(2a) = 1 - \sin^2 a - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$$
2. On a
$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\sin(a)\cos(a).$$
3. Enfin, si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a \not\equiv \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, alors $2a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et on peut écrire
$$\tan(2a) = \tan(a+a) = \frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(a)} = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

■

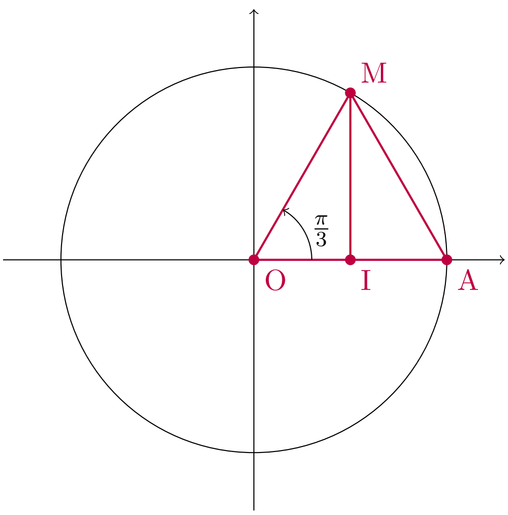
Corollaire 2: Angles remarquables

On a les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Démonstration. Les valeurs pour $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ ont déjà été vues.

• Pour $x = \dfrac{\pi}{3}$, on a la figure suivante.



Le triangle OMA est isocèle en O puisque $OM = OA = 1$.
Or, $\widehat{MOA} = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\widehat{OMA} = \widehat{MAO} = \dfrac{\pi - \widehat{MOA}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.
Ainsi, $\widehat{MOA} = \widehat{OMA} = \widehat{MAO}$ donc le triangle AOM est équilatéral.

La hauteur MI est donc aussi la médiane issue de M, ce qui implique que I est le milieu de $[OA]$.

On en déduit que
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = OI = \frac{OA}{2} = \frac{1}{2}.$$
D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a donc
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$, il vient
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}$.

- Pour $x = \dfrac{\pi}{6}$, on utilise les formules montrées précédemments :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
et
$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$
On en déduit que
$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Enfin, pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, en utilisant la formule $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$, on trouve

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, on en déduit que
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Ainsi, $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et puisque $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, on a encore
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il en découle que
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.$$

■

Exemple 1.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

6.2 Résolution d'équations trigonométriques

6.2.1 Equations $\cos(x) = c, \sin(x) = s, \tan(x) = t$

En utilisant les symétries et périodicités des fonctions cosinus, sinus et tangente, on a immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 5

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

1. $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y[2\pi]$.
2. $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - y[2\pi]$.
3. $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x \equiv y[\pi]$.

Exemple 2. • $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

• $\sin(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$.

• $\tan(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \equiv -\dfrac{\pi}{3}[\pi]$.

Définition 3

• Pour tout $c \in [-1, 1]$, l'équation $\cos(\theta) = c$ admet une unique solution dans $[0, \pi]$. Cette solution est notée $\arccos(c)$.
• Pour tout $s \in [-1, 1]$, l'équation $\sin(\theta) = s$ admet une unique solution dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cette solution est notée $\arcsin(s)$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(\theta) = t$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cette solution est notée $\arctan(t)$.

Remarque 5. •

$$\forall c \in [-1, 1], \cos(\arccos(c)) = c \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta.$$

En revanche, on a par exemple $\arccos(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$.

•

$$\forall s \in [-1, 1], \sin(\arcsin(s)) = s \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta.$$

En revanche, on a par exemple $\arcsin(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$.

•

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(t)) = t \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta.$$

En revanche, on a par exemple $\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0 \neq \pi$.

Exemple 3.

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = \frac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi.
\end{aligned}$$

6.2.2 Equations $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = c$

On s'intéresse dans cette dernière section aux équations de la forme $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = c$ où a, b, c sont trois réels et θ est l'indéterminée.

Si a et b sont simultanément nuls, l'équation n'est vraie que si $c = 0$. Excluons donc ce cas. On suppose dorénavant que $(a, b) \neq (0, 0)$ (i.e. a et b ne peuvent être simultanément nuls).

Ainsi, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$: on peut donc diviser l'équation par ce terme et on obtient

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin(\theta)\right).$$

Posons $a' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $b' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

On a $a'^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1$ donc $a' \in [-1, 1]$. Ainsi, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi) = a'$.

Par ailleurs, $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{b^2}{a^2 + b^2} = b'^2$ donc $\sin(\varphi) = \pm b'$.

Quitte à changer φ en $-\varphi$ (ce qui ne modifiera pas la valeur de $\cos(\varphi)$), on peut supposer que

$$\cos(\varphi) = a' \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = b'.$$

En posant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, il vient

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = r(\cos(\varphi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta)) = r\cos(\theta - \varphi).$$

On a donc montré qu'on peut toujours transformer une expression de la forme $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ en $r\cos(\theta - \varphi)$.

Exemple 4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Remarque 6. Si on avait choisi φ tel que $\sin(\varphi) = a'$ et $\cos(\varphi) = b'$, on aurait trouvé une expression de la forme $r\sin(\theta + \varphi)$, ce qui peut être avantageux dans certaines situations.

On peut maintenant résoudre facilement l'équation $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = c$.

En effet, on vient de montrer que celle-ci est équivalente à une équation de la forme

$$r\cos(\theta - \varphi) = c$$

ou encore

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{c}{r}.$$

Si $\dfrac{c}{r} \notin [-1, 1]$, cette équation n'admet pas de solution.

Si $\dfrac{c}{r} \in [-1, 1]$, $\cos(\theta - \varphi) = \cos\left(\arccos\left(\dfrac{c}{r}\right)\right)$.

On a alors $\theta - \varphi \equiv \arccos\left(\dfrac{c}{r}\right)\ [2\pi]$ ou $\theta - \varphi \equiv -\arccos\left(\dfrac{c}{r}\right)\ [2\pi]$ d'où

$$\theta \equiv \varphi + \arccos\left(\frac{c}{r}\right)\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \varphi - \arccos\left(\frac{c}{r}\right)\ [2\pi].$$

Exemple 5. Résolvons l'équation $\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{3} - x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} - x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi[2\pi].
\end{aligned}$$

6.3 Fonctions circulaires

6.3.1 Fonctions cosinus et sinus

On a déjà vu les propriétés de parité et de périodicité des fonctions cosinus et sinus. Etudions maintenant leur dérivabilité.

Commençons par un lemme.

Lemme 1

On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0.$$

Démonstration. • Par des considérations d'aires sur le cercle trigonométrique, on remarque que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(x) \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.

Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est paire, on a également $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et finalement,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

• En utilisant les formules de duplication, on a pour tout réel x,

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

donc pour tout réel x non nul :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} & = & 1 \end{cases}$ donc par composition de limites, on trouve que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$ et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

• Enfin, on en conclut par produit de limites que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} = 0.$$

■

Proposition 6: Dérivation du cosinus et du sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

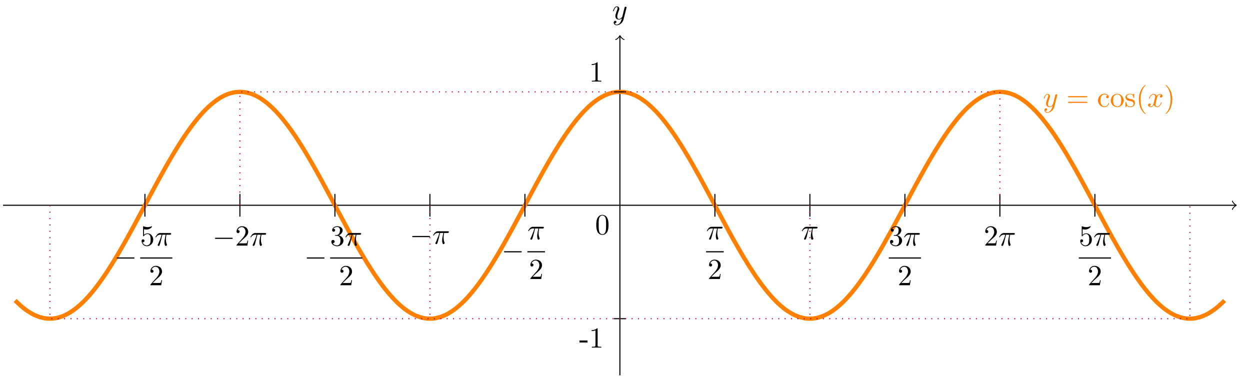
Démonstration. • Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a

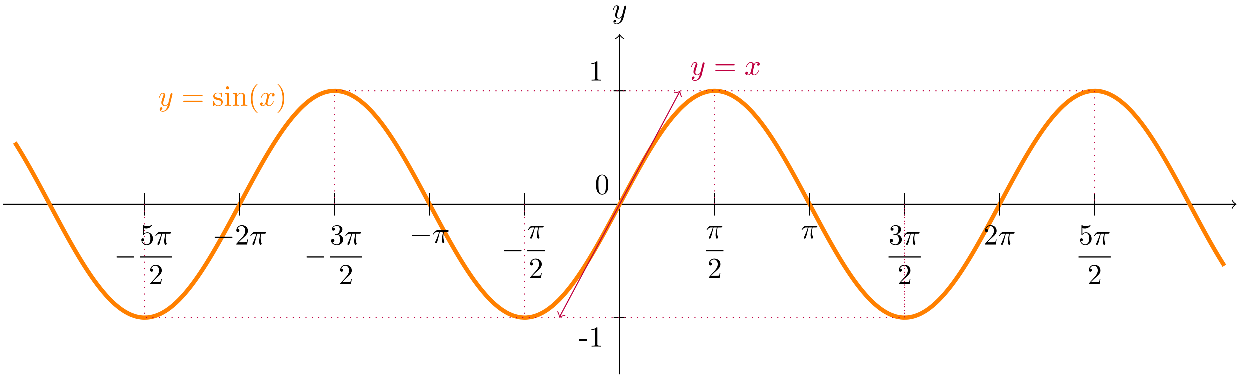
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin(x) \times \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0} + \cos(x) \times \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve que sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.
• Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos(x) \times \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0} - \sin(x) \times \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \\ &= -\sin(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$. ■





Enfin, signalons l'inégalité suivante, très utile en pratique :

Proposition 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$.

Démonstration.

• Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |\sin(x)| \leqslant |x| = x$ i.e. $-x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \sin(x) + x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \cos(x) + 1 \geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geqslant f(0) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) + x \geqslant 0$, i.e. $\sin(x) \geqslant -x$.

De même, posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g(x) = x - \sin(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geqslant g(0) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x - \sin(x) \geqslant 0$, i.e. $\sin(x) \leqslant x$.

On a donc bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, -x \leqslant \sin(x) \leqslant x$, i.e. $-|x| \leqslant \sin(x) \leqslant |x|$ ou encore $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Alors $-x \in \mathbb{R}_+$ donc d'après ce qui précède, $|\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|$.

Par imparité de sin, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et on obtient alors $|-\sin(x)| \leqslant |x|$, i.e. $|\sin(x)| \leqslant |x|$, ce qui est vrai pour tout réel $x \leqslant 0$.

On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$. ■

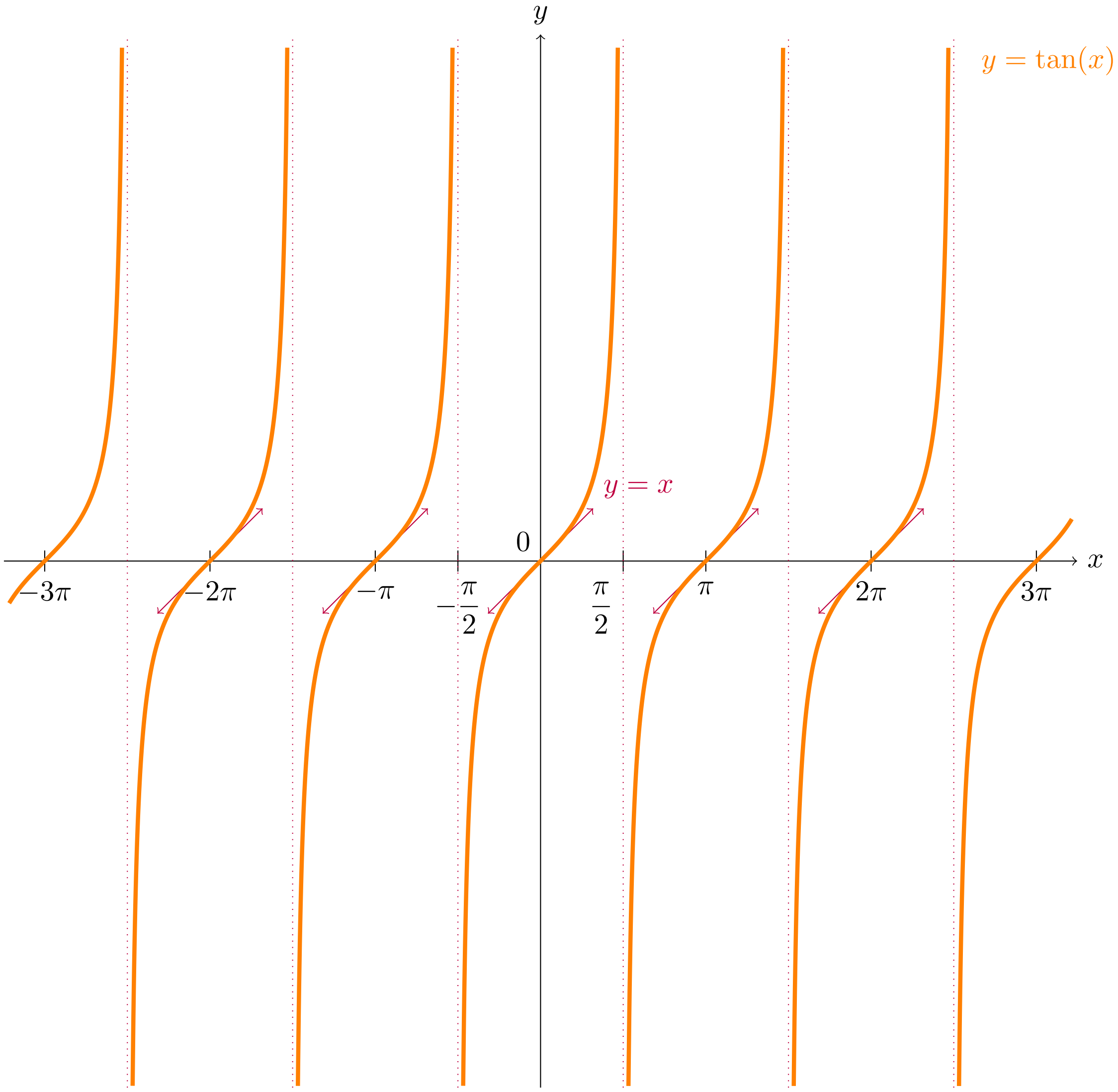
Remarque 7. On verra plus tard que cette inégalité est également une conséquence de l'inégalité des accroissements finis.

6.3.2 Fonction tangente

On a vu que la fonction tangente est définie sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, est impaire et π-périodique.

On sait que la fonction tangente est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ avec $\tan(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$).

Ceci permet de tracer la courbe de la fonction tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. On la complète sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par symétrie par rapport à l'origine puis sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$ par π-périodicité. On retrouve en particulier que $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et que $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$. On obtient la courbe suivante :



On remarque que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ est une asymptote verticale.

Enfin, on a le résultat suivant :

Proposition 8: Dérivation de la fonction tangente

La fonction tangente est dérivable sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$ et on a pour tout $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ainsi, la fonction tangente est dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, le dénominateur ne s'y annulant pas et on a pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

D'autre part, on a également pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$,

$$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x).$$

On a donc bien pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. ■

Ainsi, une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction tangente au point $(0,0)$ est

$$y = \tan'(0)(x-0)+\tan(0) = (1+\tan^2(0))x = x.$$