

Applications

TABLE DES MATIÈRES

4 Applications	1
4.1 Applications	1
4.1.1 Définition et premiers exemples	1
4.1.2 Restriction et prolongement	3
4.1.3 Image directe d'une partie de l'ensemble de départ	4
4.1.4 Image réciproque	5
4.1.5 Composition d'applications	6
4.2 Injections, surjections, bijections	7
4.2.1 Applications injectives	7
4.2.2 Applications surjectives	9
4.2.3 Applications bijectives	10

4.1 Applications

4.1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1: Application

Soient E et F deux ensembles non vides.

Une application $f : E \rightarrow F$ est la donnée d'une partie $A \subset E \times F$ telle que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in A$.

Autrement dit, tout élément x de E est en relation avec un et un seul élément de F . L'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in A$ est noté $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f .

E est l'ensemble de départ de l'application f ; F est son ensemble d'arrivée.

L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

Remarque 1. • Par définition, tout élément de E admet une unique image par f . En revanche, un élément de F peut admettre plusieurs antécédents par f .

- La notation F^E sera justifiée dans le chapitre Dénombrement.

Exemple 1. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u(n)$. On a ainsi construit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une suite réelle n'est donc rien d'autre qu'une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dont on note les images un peu différemment.

Ceci justifie qu'on note souvent $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Exemple 2. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

- Tout élément $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet exactement deux antécédents par $f : \sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$.
- 0 admet un unique antécédent par f : lui-même.
- Les éléments de $\mathbb{R}_-^*$ n'admettent pas d'antécédent par f .

Remarque 2. On peut également définir une application en explicitant les images de tous les éléments de l'espace de départ.

Par exemple, on peut définir l'application $f : \{\sqrt{2}, e, \pi\} \rightarrow \{-1, 3, 8\}$ telle que

$$\begin{cases} f(\sqrt{2}) &= -1 \\ f(e) &= 3 \\ f(\pi) &= 3 \end{cases}$$

Le fait que tous les éléments de l'espace d'arrivée ne soient pas atteints par f n'est pas un problème.

Définition 2

On dit que deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée F et si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Exemple 3. Les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ne sont pas égales, même si pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$, car elles n'admettent pas le même ensemble de départ.

Définition 3: Application Identité

Soit E un ensemble non vide.

On appelle application identité de E , et on note Id_E , l'application définie par :

$$\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x.$$

Définition 4: Application constante

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que f est constante s'il existe un élément $a \in F$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = a$.

Définition 5: Fonction indicatrice

Soit E un ensemble non vide. Soit $A \subset E$ une partie de E .

On appelle fonction indicatrice de A , et on note $\mathbb{1}_A$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 3. • Les antécédents de 1 par $\mathbb{1}_A$ sont tous les éléments de l'ensemble A ; les antécédents de 0 par $\mathbb{1}_A$ sont tous les éléments de l'ensemble $\overline{A}$.

• Soit E un ensemble non vide. L'indicatrice de E , $\mathbb{1}_E : E \rightarrow \{0, 1\}$ est l'application constante égale à 1 tandis que l'indicatrice de l'ensemble vide, $\mathbb{1}_\emptyset : E \rightarrow \{0, 1\}$ est l'application constante égale à 0.

• Soient A et B deux parties de E . On a $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

L'implication directe est triviale.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. Soit $x \in A$. Alors $1 = \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ donc $x \in B$, ce qui prouve l'inclusion $A \subset B$. Par symétrie, on a l'inclusion réciproque d'où l'égalité $A = B$.

Exemple 4. • L'application $\mathbb{1}_\mathbb{Z} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ est l'application qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{1}_\mathbb{Z}(n) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]n, n+1[, \mathbb{1}_\mathbb{Z}(x) = 0.$$

• L'application $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ est l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4.1.2 Restriction et prolongement

Définition 6: Restriction

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$ une partie de E .

On appelle restriction de f à A et on note $f|_A$, l'application définie sur A par

$$\begin{aligned} f|_A : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Remarque 4. Il y a unicité de la restriction d'une application à une partie de l'ensemble de départ.

Exemple 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto |x|$. La restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est l'application $\text{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

Définition 7: Prolongement

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $A \subset E$ une partie de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

On appelle prolongement de f à E toute application $g : E \rightarrow F$ telle que $g|_A = f$, i.e.

$$\forall x \in A, g(x) = f(x).$$

Remarque 5. On dit d'une telle application g qu'elle est **un** prolongement de f . Il n'y a pas unicité de ce prolongement.

Exemple 6. L'application $\text{Id}_{\mathbb{R}_+}$ admet une infinité de prolongements à $\mathbb{R}$. En effet, toute application de la forme

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ h(x) & \text{si } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où $h : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une application quelconque, est un prolongement de $\text{Id}_{\mathbb{R}_+}$ à $\mathbb{R}$.

Par exemple, l'application valeur absolue, l'application $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ ou l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x + |x|}{2}$ sont des prolongements possibles.

4.1.3 Image directe d'une partie de l'ensemble de départ

Définition 8: Image directe d'une partie

Soient E et F deux ensembles non vides, et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$ une partie de E .

On appelle image directe de A par f , et on note $f(A)$, le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F.$$

Dans le cas où $A = E$, on dit que $f(E)$ est l'image de f et on la note souvent $\text{Im}(f)$.

Remarque 6. En d'autres termes, $f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A . On a l'équivalence $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, f(x) = y$.

Exemple 7. • $f(\emptyset) = \emptyset$.

- Pour tout $x \in E, f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

Proposition 1: Propriétés de l'image directe

Soient E et F deux ensembles non vides, et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et B deux parties de E . On a les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Démonstration.

1. Supposons que $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$. Par définition, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, puisque $A \subset B, x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$, d'où l'inclusion $f(A) \subset f(B)$.
2. • Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
– Si $x \in A, f(x) \in f(A)$ donc $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.
– Si $x \in B, f(x) \in f(B)$ donc $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.
Dans les deux cas, $f(x) \in f(A) \cup f(B)$, ce qui prouve que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
• Montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Soit $y \in f(A) \cup f(B)$.
– Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, $A \subset A \cup B$ donc $x \in A \cup B$, ce qui prouve que $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
– Si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Or, $B \subset A \cup B$ donc $x \in A \cup B$, ce qui prouve que $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
Dans les deux cas, $y \in f(A \cup B)$, ce qui prouve que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Finalement, on a bien $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Puisque $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, d'après la première propriété, on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$

d'où $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. ■

Remarque 7. En général, on n'a pas $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. En effet, soit $f : x \rightarrow x^2$, soit $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$. Alors $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$. Or, $f(A) = \mathbb{R}_+$ et $f(B) = \mathbb{R}_+$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

4.1.4 Image réciproque

Définition 9: Image réciproque

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset F$ une partie de F .

on appelle image réciproque de A par f , notée $f^{-1}(A)$, la partie de E suivante :

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}.$$

Autrement dit, $f^{-1}(A)$ est l'ensemble des éléments de E dont les images par f appartiennent à A , ou encore l'ensemble des antécédents des éléments de A .

Remarque 8. Avec les notations précédentes, on a toujours $f^{-1}(F) = E$, $f^{-1}(\text{Im}(f)) = E$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Attention ! Ici, f^{-1} ne désigne pas la bijection réciproque de f (qui n'existe d'ailleurs peut-être pas!).

Exemple 8. • Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$.

On a $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$.

• $\exp^{-1}([0, 1]) = \exp^{-1}(]0, 1]) = \mathbb{R}_+$.

• Si $A \subset E$, alors $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$ et $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) = \overline{A}$.

Proposition 2: Propriétés de l'image réciproque

Soient E et F deux ensembles non vides. Soient A et B deux parties de F .

1. Si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.
3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Démonstration.

1. Supposons que $A \subset B$. Montrons que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Soit $x \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x) \in A$. Or, $A \subset B$, donc $f(x) \in B$, ce qui signifie que $x \in f^{-1}(B)$.

On a donc bien montré l'inclusion $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

2. Soit $x \in E$.

On a

$$x \in f^{-1}(\overline{A}) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(A)}$$

donc $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

3. Soit $x \in E$. On a

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B)$$

i.e. $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ donc $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

4. Soit $x \in E$. On a

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B)$$

i.e. $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ donc $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

5. En utilisant les résultats précédents, on trouve

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A \cap \overline{B}) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)}$$

d'où $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

■

4.1.5 Composition d'applications

Définition 10: Composition d'applications

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

On définit l'application composée de f par g , notée $g \circ f$, comme l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

On note alors pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque 9. Supposons que $f \circ g$ et $g \circ f$ existent. On dit que f et g commutent si $f \circ g = g \circ f$.
En particulier, pour toute application $f : E \rightarrow E$,

$$f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f = f.$$

Exemple 9. • Considérons les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.
 $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$. D'après la définition, on peut définir $g \circ f$. De plus, comme $g(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ est inclus dans l'ensemble de départ de f , on peut également définir $f \circ g$ et on a

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ & f \circ g : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2} = |x| & x &\longmapsto (\sqrt{x})^2 = x. \end{aligned}$$

En particulier, $g \circ f|_{\mathbb{R}_+} = f \circ g$.

• Soit $f : \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket$ définie par $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ et $g : \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket$ définie par $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$.

Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont encore des applications de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ vérifiant :

$$f \circ g(1) = 3, f \circ g(2) = 2, f \circ g(3) = 1$$

et

$$g \circ f(1) = 2, g \circ f(2) = 1, g \circ f(3) = 3.$$

En particulier, on remarque que $f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition 3: Associativité de la composition

Soient E, F, G, H quatre ensembles non vides.

Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow H$ trois applications.

Alors on a l'égalité

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On note cette dernière application $h \circ g \circ f$.

Définition 11

Soit $f : E \longrightarrow E$.

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = \text{Id}_E$.

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on a

$$f^n \circ f^p = f^p \circ f^n = f^{n+p}.$$

Proposition 4: Image réciproque d'une composée

Soient E, F, G trois ensembles non vides. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Soit $A \subset G$ une partie de G .

Alors $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Démonstration. Raisonnons par équivalences. On a

$$x \in (g \circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow g(f(x)) \in A \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \subset F \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)),$$

ce qui prouve que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset E$. ■

4.2 Injections, surjections, bijections

4.2.1 Applications injectives

Définition 12: Applications injectives

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Autrement dit, f est injective si tout élément de l'espace d'arrivée admet au plus un antécédent par f .

Remarque 10. • Par contraposition, on a la définition équivalente suivante : f est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

• En pratique, pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, une méthode possible est de prouver que pour tout $y \in f(E)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$.

Exemple 10. • L'application Id_E est toujours injective pour tout ensemble E .

- Toute application constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective.
- Toute application définie sur un singleton est injective.
- L'application $\begin{matrix} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est injective.

En effet, soient $(x, x') \in (\mathbb{R}_+^2)$ tels que $f(x) = f(x')$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 = x'^2 \Leftrightarrow (x - x')(x + x') = 0 \Leftrightarrow x - x' = 0 \text{ ou } x + x' = 0.$$

- Si $x - x' = 0$, alors $x = x'$.

- Si $x + x' = 0$, puisque $x \geq 0$ et $x' \geq 0$, alors $x + x' \geq 0$ donc $x + x' = 0 \Rightarrow x = x' = 0$. (En effet, si l'un des deux nombres x ou x' était non nul, on aurait $x + x' > 0$.)

Dans tous les cas, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$ donc f est injective.

En revanche, l'application
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2$$
 n'est pas injective puisque $-1 \neq 1$ mais $g(-1) = g(1) = 1$.

• La restriction d'une application injective est injective. En revanche, un prolongement d'une application injective n'est pas nécessairement injective.

Proposition 5

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ non vides. Alors toute application $f : E \rightarrow F$ strictement monotone est injective.

Démonstration. Montrons-le dans le cas où f est strictement croissante.

Soient $(x, x') \in E^2$ avec $x \neq x'$. Quitte à inverser x et x' , on peut supposer sans perte de généralité que $x < x'$.

Puisque f est strictement croissante, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ donc en particulier $f(x) \neq f(x')$.

On a donc bien montré que pour tout $(x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, ce qui prouve l'injectivité de f .

Si f est strictement décroissante, $-f$ est strictement croissante donc $-f$ est injective et on a pour tout $(x, x') \in E^2$,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow -f(x) = -f(x') \Rightarrow x = x'.$$

■

Proposition 6

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Démonstration.

1. Supposons f et g injectives.

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, i.e.

$$g(f(x)) = g(f(x')).$$

Par injectivité de g , ceci implique que $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f , ceci implique que $x = x'$.

Ainsi, $\forall (x, x') \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$, ce qui assure l'injectivité de $g \circ f$.

2. Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons qu'alors f est injective.

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$. En composant par g , on a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$, i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

Par injectivité de $g \circ f$, ceci implique que $x = x'$.

Finalement, on a bien $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, ce qui assure l'injectivité de f .

■

Remarque 11. • Si $g \circ f$ est injective, g n'est pas nécessairement injective.

$$\text{Soient } \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}.$$

Alors $g \circ f$ est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ qui est injective comme la composée des deux applications injectives $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto e^x$ mais g ne l'est pas.

• Si seule l'application f est injective, alors $g \circ f$ n'est pas nécessairement injective. En effet, considérons $f : E \longrightarrow E$ une application injective, où $E \subset \mathbb{R}$ et g l'application nulle sur E . Alors $g \circ f$ est l'application nulle sur E et n'est donc pas injective.

4.2.2 Applications surjectives

Définition 13: Applications surjectives

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Autrement dit, f est surjective si tout élément de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent par f , ou encore $f(E) = F$.

Remarque 12. La surjectivité ne dépend que de l'espace d'arrivée. En fait, toute application est surjective sur son image. En effet, soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors l'application $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ est surjective.

$$x \longmapsto f(x)$$

On peut donc toujours rendre une application surjective, quitte à restreindre l'espace d'arrivée.

Exemple 11. • L'application $\text{Id}_E : E \longrightarrow E$ est toujours surjective pour tout ensemble E .

• Toute application dont l'espace d'arrivée est un singleton est surjective.

• L'application $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est surjective. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = y$.

En revanche, l'application $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ n'est pas surjective car les éléments de $\mathbb{R}_-^*$ n'admettent aucun antécédent par f .

• Un prolongement d'une application surjective est surjective. En revanche, la restriction d'une application surjective n'est pas nécessairement surjective.

Proposition 7

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démonstration.

1. Soit $z \in G$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Ainsi, $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

On a donc bien montré que pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$, ce qui assure la surjectivité de $g \circ f$.

2. Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f : E \rightarrow G$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.

Posons $y = f(x) \in F$. On a donc $z = g(y)$.

On a donc bien montré que pour tout $z \in G$, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, ce qui assure la surjectivité de g .

■

Remarque 13. • Si $g \circ f$ est surjective, f n'est pas nécessairement surjective.

Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$ l'application nulle.

Alors $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$ est l'application nulle et est donc surjective, mais f n'est pas surjective (puisque $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$).

• Si seule l'application g est surjective, alors $g \circ f$ n'est pas nécessairement surjective.

En effet, considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application nulle et $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ définie par $g(x) = \sin(x)$. Alors $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est l'application nulle (car $\sin(0) = 0$) et n'est donc pas surjective.

4.2.3 Applications bijectives

Définition 14: Applications bijectives

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que f est bijective (ou est une bijection) si f est à la fois injective et surjective.

Autrement dit, f est bijective si tout élément de l'espace d'arrivée admet un unique antécédent par f , i.e.

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$

Remarque 14. En pratique, pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est bijective, une méthode possible est de prouver que pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$.

Exemple 12. • Pour tout ensemble E non vide, l'application $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ est toujours bijective.

• L'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective.

• L'application $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est bijective.

• L'application $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos(x)$ est bijective.

• L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = e^x$ est bijective.

• Soit $f : E \rightarrow F$ une application injective. Alors $\tilde{f} : E \rightarrow f(E)$ est bijective.

En particulier, si E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, alors toute application $f : E \rightarrow f(E)$ strictement monotone est bijective.

• Soit $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$ définie par $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$. Alors f est une bijection.

Définition 15: Application réciproque

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Notons $f^{-1}(y)$ cet élément x .

Ceci permet de définir une nouvelle application

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\rightarrow E \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

qui vérifie $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$.

On dit que f^{-1} est l'application réciproque de f .

Remarque 15. Pour toute partie $A \subset F$, l'image directe de A par f^{-1} correspond à l'image réciproque de A par f et les deux se notent $f^{-1}(A)$.

Exemple 13. • Pour tout ensemble E non vide, la réciproque de l'application $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ est elle-même.

- La réciproque de l'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $x \mapsto x^2$ est $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $x \mapsto \sqrt{x}$.
- La réciproque de l'application $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ $x \mapsto \sin(x)$ est $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $x \mapsto \arcsin(x)$.
- La réciproque de l'application $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ $x \mapsto \cos(x)$ est $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $x \mapsto \arccos(x)$.
- La réciproque de l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ $x \mapsto e^x$ est $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \ln(x)$.
- La réciproque de l'application $f : \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket$ définie par $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ est $f^{-1} : \llbracket 1, 3 \rrbracket$ définie par $f^{-1}(1) = 1, f^{-1}(2) = 3$ et $f^{-1}(3) = 2$.

On remarque que dans ce cas, $f = f^{-1}$, ce qui équivaut à $f^2 = \text{Id}_{\llbracket 1, 3 \rrbracket}$ comme nous allons le voir juste après.

Proposition 8

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$ son application réciproque. Alors

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. On pose $y = f(x)$ de telle sorte que $x = f^{-1}(y)$.

Alors

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = \text{Id}_E(x)$, ce qui implique que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

De même, soit $y \in F$. On pose $x = f^{-1}(y)$ de telle sorte que $y = f(x)$. Alors

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Ainsi, pour tout $y \in F$, $f \circ f^{-1}(y) = \text{Id}_F(y)$, ce qui implique que $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$. ■

Remarque 16. Dans le cas où $E = F$ et $f = f^{-1}$, on a donc $f \circ f = f^2 = \text{Id}_E$.

Corollaire 1

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$ son application réciproque.

Alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ est surjective, donc f^{-1} est surjective.

De même, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ est injective donc f^{-1} est injective.

Ainsi, f^{-1} est à la fois surjective et injective, donc est bijective.

Soit $(f^{-1})^{-1} : E \rightarrow F$ l'application réciproque de f^{-1} .

Soit $x \in E$. Considérons l'unique élément $y \in F$ tel que $f^{-1}(y) = x$. On a alors

$$y = (f^{-1})^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

donc finalement $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$ et ce pour tout $x \in E$, ce qui prouve que

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

■

On a la réciproque de la proposition précédente :

Proposition 9: Caractérisation de l'application réciproque

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On suppose qu'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Démonstration. Puisque $g \circ f = \text{Id}_E$ est injective, alors f est injective et puisque $f \circ g = \text{Id}_F$ est surjective, alors f est surjective, donc f est bijective.

Soit $y \in F$. Alors $f^{-1}(y) \in E$ donc

$$g \circ f(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \Leftrightarrow g(y) = f^{-1}(y),$$

et ce pour tout $y \in F$ donc $g = f^{-1}$.

■

Remarque 17. • Ce résultat est utile en pratique. Si on arrive à construire une application g vérifiant ces propriétés, alors on peut affirmer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

• Ce résultat montre que f^{-1} est l'unique application définie sur F à valeurs dans E vérifiant ces propriétés.

• On a la réciproque à une remarque précédente : si $f : E \rightarrow E$ est une application telle que $f^2 = f \circ f = \text{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

Proposition 10: Réciproque d'une composée d'applications bijectives

Soient E, F, G trois ensembles non vides. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des bijections.

Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Remarquons que $f^{-1} \circ g^{-1} : G \rightarrow E$. Il s'agit d'une simple vérification :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E.$$

et

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G.$$

En vertu de la proposition précédente, ceci assure que $g \circ f$ est bijective et que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

■

Remarque 18. Pour prouver la bijectivité de $g \circ f$, on pouvait également utiliser le fait que la composée de deux applications injectives est injective et que la composée de deux applications surjectives est surjective.

Définition 16

Soit $f : E \rightarrow E$ une application bijective.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$f^n \circ f^p = f^p \circ f^n = f^{n+p}.$$

Enfin, mentionnons une dernière propriété importante. On rappelle que le graphe d'une application $f : E \rightarrow F$, où E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$, est l'ensemble

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Proposition 11: Symétrie des graphes d'applications bijectives

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$.

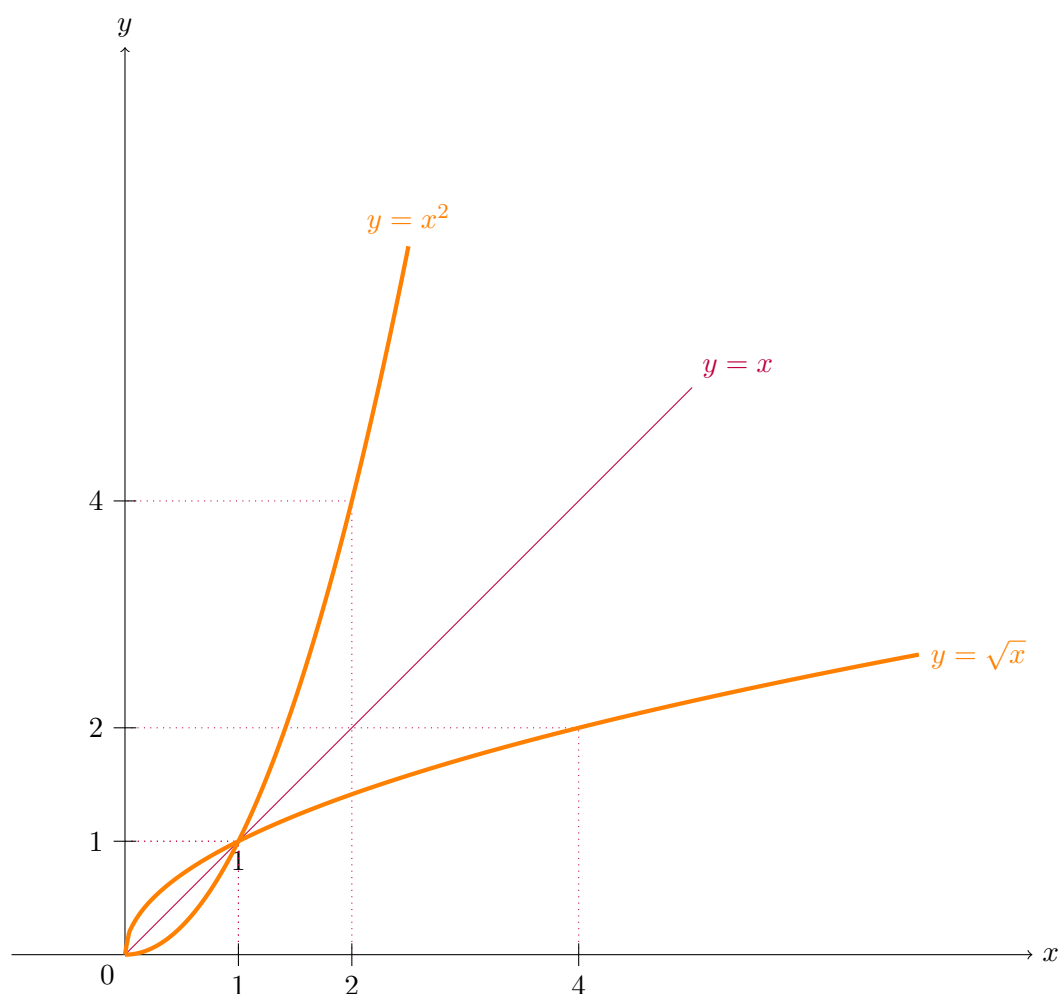
Alors les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice, i.e. la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}.$$

Or, la transformation qui envoie le point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ sur (y, x) est la symétrie d'axe $y = x$, d'où le résultat. ■

Exemple 14. • Les graphes des applications $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad x \mapsto x^2$ et $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad x \mapsto \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



- Les graphes des applications $f : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto e^x}]0, +\infty[$ et $f^{-1} :]0, +\infty[\xrightarrow{x \mapsto \ln(x)} \mathbb{R}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

