
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°1

Exercice 1.

Remarquons que les Pomékon de base et bien dressés disent la vérité, les Pomékon de base et mal dressés ne disent pas la vérité, les Pomékon évolués et bien dressés ne disent pas la vérité et les Pomékon évolués et mal dressés disent la vérité.

●**Énigme 1 :**

- Supposons que Pticachou soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Or, la négation de son affirmation est: Je suis un Pomékon évolué et mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Pticachou soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, donc de deux choses l'une: ou bien c'est un Pomékon de base, ou bien il est bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Pticachou soit un Pomékon de base et mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux donc comme dans le premier cas, on en déduit que c'est un Pomékon évolué et mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Pticachou soit un Pomékon de base et bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et effectivement, c'est un Pomékon de base ou bien dressé.

Pticachou est donc un Pomékon de base bien dressé.

●**Énigme 2:**

- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon de base bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai. Ainsi, il n'est pas un Pomékon de base bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon de base et mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Ainsi, il est un Pomékon de base bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Donc c'est un Pomékon de base bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, donc ce n'est pas un Pomékon de base bien dressé, ce qui est exact.

Perspicouac est donc un Pomékon évolué mal dressé.

●**Énigme 3 :**

Supposons que Roudoudou ait répondu oui, c'est à dire qu'il confirme être un Pomékon évolué mal dressé.

- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai et c'est donc un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Ainsi, la bonne réponse à la question était non, ce qui signifie qu'il n'est pas un Pomékon évolué mal dressé, ce qui est tout à fait juste.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux, et comme dans le cas précédent, cela implique que ce n'est pas un Pomékon évolué mal dressé, ce qui est encore juste.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et c'est un Pomékon évolué et mal dressé.

Ainsi, si Roudoudou répond oui, on ne peut pas conclure quant à son niveau d'évolution et son niveau de dressage (on peut juste exclure qu'il soit un Pomékon de base bien dressé).

Puisque l'énoncé de l'énigme dit que sa réponse suffit à conclure, c'est qu'il a nécessairement

répondu non, c'est à dire qu'il nie être un Pomékon évolué mal dressé.

- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux, donc c'est un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.

- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et il n'est donc pas un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.

- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux, donc c'est un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.

- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et ce n'est pas un Pomékon évolué mal dressé, ce qui est tout à fait juste !

Roudoudou est donc un Pomékon de base bien dressé.

Énigme 4

L'affirmation de Samalèche est logiquement équivalente à Je suis un Pomékon évolué si et seulement si je suis bien dressé.

S'il dit la vérité, c'est un Pomékon de base mal dressé ou un Pomékon évolué bien dressé. Mais ces deux types de Pomékon ne disent pas la vérité. Contradiction.

Nécessairement, Samalèche ne dit pas la vérité.

Ainsi, c'est un Pomékon de base bien dressé ou un Pomékon évolué mal dressé. Mais ces deux types de Pomékon disent la vérité ! Contradiction à nouveau.

Aucun Pomékon ne peut dire cette phrase.

Remarque: en logique, c'est ce qu'on appelle un paradoxe.

Exercice 2.

- Les conditions sont vérifiées trivialement pour l'ensemble vide puisqu'il ne contient aucune partie ! Il est donc vrai trivialement que $\emptyset$ est un pavage achevé de E .

- La seule partie de E contenue dans $\{\emptyset\}$ est $\emptyset$. Or, $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \{\emptyset\}$ et $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \in \{\emptyset\}$.

On vérifie de même que pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\{\emptyset\}$ (ce qui implique qu'on a nécessairement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \emptyset$), on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \in \{\emptyset\}$, ce

qui prouve que $\{\emptyset\}$ est un pavage achevé de E .

- Montrons que $\mathcal{P}(E)$ est un pavage achevé de E .

Tout d'abord, on a bien pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \cup B \in \mathcal{P}(E)$ et $A \cap B \in \mathcal{P}(E)$.

Ensuite, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

On a toujours $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}(E)$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}(E)$ (que la suite soit croissante, décroissante, ou non).

On a donc bien vérifié que $\mathcal{P}(E)$ est un pavage achevé de E .

- Supposons que $E = \{a\}$.

Les pavages de E sont alors $\mathcal{P} = \emptyset, \mathcal{P} = \{\emptyset\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}$ et $\mathcal{P} = \{\{a\}\}$.

- Supposons que $E = \{a, b\}$. Dans ce cas, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Les pavages de E sont alors

$$\mathcal{P} = \emptyset, \mathcal{P} = \{\emptyset\}, \mathcal{P} = \{\{a\}\}, \mathcal{P} = \{\{b\}\}, \mathcal{P} = \{\{a, b\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}\},$$

$$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a, b\}\}, \mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}\}, \mathcal{P} = \{\{b\}, \{a, b\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$$

et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$.

3. (a) Raisonnons par double inclusion.

- Montrons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket \subset \mathbb{N}$.

Soit $k \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket$.

Par définition, ceci signifie qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. A fortiori, $k \in \mathbb{N}$, ce qui prouve l'inclusion voulue.

- Montrons que $\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition, $k \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Ainsi, il existe bien un entier naturel n , en l'occurrence $n = k$, tel que $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, ce qui signifie que $k \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket$ et prouve

l'inclusion voulue.

On en déduit que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket = \mathbb{N}$.

(b) Commençons par montrer que $\mathcal{P}$ est un pavage de $\mathbb{N}$.

Tout d'abord, on a bien $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}^2$. Par définition de $\mathcal{P}$, il existe des entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $A = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $B = \llbracket 0, p \rrbracket$.

On a alors $A \cup B = \llbracket 0, \max(n, p) \rrbracket \in \mathcal{P}$ et $A \cap B = \llbracket 0, \min(n, p) \rrbracket \in \mathcal{P}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}$ est un pavage de $\mathbb{N}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \llbracket 0, n \rrbracket \in \mathcal{P}$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.

Or, d'après la question précédente, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ qui n'est pas un élément de $\mathcal{P}$.

Ainsi, $\mathcal{P}$ est un pavage non achevé de $\mathbb{N}$.

4. (a) La question 2 nous fournit des contre-exemples.

En effet, soit $E = \{a, b\}$, $\mathcal{P}_1 = \{\{a\}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\{b\}\}$.

On a vu en question 2 que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des pavages de E mais $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$ n'est pas un pavage de E (en particulier parce que $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \notin \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$).

Ainsi, $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ n'est pas nécessairement un pavage de E .

(b) Montrons que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un pavage de E .

Tout d'abord, puisque $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}(E)$, on a bien $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}(E)$.

Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^2$.

Puisque $A \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{P}_1$ et que $\mathcal{P}_1$ est un pavage, alors $A \cup B \in \mathcal{P}_1$ et $A \cap B \in \mathcal{P}_1$.

De même, puisque $\mathcal{P}_2$ est un pavage, on a également $A \cup B \in \mathcal{P}_2$ et $A \cap B \in \mathcal{P}_2$.

Ainsi, $A \cup B \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ et $A \cap B \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, ce qui prouve que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un pavage de E .

5. (a) Par définition, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(E)$ et d'après la question 1, $\mathcal{P}(E)$ est un pavage achevé de E .

Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ est un pavage achevé de E contenant $\mathcal{P}$ donc

l'ensemble des pavages achevés de E contenant $\mathcal{P}$ est non vide.

(b) • On a démontré en question 6.(b) qu'une intersection de deux pavages de E était encore un pavage de E . La même démonstration se généralise à un nombre quelconque de pavages, et on montrerait de même qu'une intersection en nombre quelconque de pavages de E est encore un pavage de E .

D'après la question précédente, l'ensemble des pavages achevé de E contenant $\mathcal{P}$ étant non vide, l'intersection de tous ces pavages est donc encore un pavage contenant $\mathcal{P}$ (puisque $\mathcal{P}$ est contenu dans chacun d'entre eux).

Ceci justifie que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage contenant $\mathcal{P}$.

• Montrons maintenant que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage achevé.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Soit $\mathcal{Q}$ un pavage achevé de E contenant $\mathcal{P}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{Q}$. Puisque $\mathcal{Q}$ est un pavage achevé de E , alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{Q}$.

Ceci étant vrai pour tous les pavages achevés de E contenant $\mathcal{P}$, on en déduit que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Une preuve analogue montre que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \widehat{\mathcal{P}}$.

On en conclut que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.

- (c) Soit $\mathcal{Q}$ un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$. Par définition, $\widehat{\mathcal{P}}$ est l'intersection de tous les pavages achevés contenant $\mathcal{P}$ donc $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{Q}$.

Ainsi, si un pavage achevé contient $\mathcal{P}$, il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.

- (d) • Supposons que $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$. Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage achevé, alors $\mathcal{P}$ est un pavage achevé.

• Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}$ est un pavage achevé. C'est un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$ donc il contient $\widehat{\mathcal{P}}$ d'après la question précédente.

De plus, par définition $\widehat{\mathcal{P}}$ contient $\mathcal{P}$, ce qui prouve par double inclusion que $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$.

On en conclut que $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$ si et seulement si $\mathcal{P}$ est un pavage achevé.

6. (a) Tout d'abord, on a bien $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}(E)$.

• Montrons que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E .

Soient $(B, B') \in \mathcal{P}_m^2$.

Soit $A \in \mathcal{P}$. Par définition de $\mathcal{P}_m$, $B \cap A \in \mathcal{P}$ et $B' \cap A \in \mathcal{P}$.

Puisque $\mathcal{P}$ est un pavage, alors

$$(B \cup B') \cap A = \underbrace{(B \cap A)}_{\in \mathcal{P}} \cup \underbrace{(B' \cap A)}_{\in \mathcal{P}} \in \mathcal{P}$$

et

$$(B \cap B') \cap A = \underbrace{(B \cap A)}_{\in \mathcal{P}} \cap \underbrace{(B' \cap A)}_{\in \mathcal{P}} \in \mathcal{P}$$

donc $B \cup B' \in \mathcal{P}_m$ et $B \cap B' \in \mathcal{P}_m$ (puisque ceci est vrai pour tout $A \in \mathcal{P}$).

On en déduit que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E .

• Montrons que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_m$.

Pour tout $B \in \mathcal{P}$, pour tout $A \in \mathcal{P}$, $B \cap A \in \mathcal{P}$ puisque $\mathcal{P}$ est un pavage, donc $B \in \mathcal{P}_m$.

Ceci prouve bien que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_m$.

Ainsi, $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E contenant $\mathcal{P}$.

(b) Supposons que $\mathcal{P}$ est achevé. Montrons que $\mathcal{P}_m$ est achevé.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}_m$.

Soit $A \in \mathcal{P}$. Alors, $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap A)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}_m$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A \in \mathcal{P}$ par définition de $\mathcal{P}_m$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $A_n \cap A \subset A_{n+1} \cap A$.

Ainsi, $(A_n \cap A)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{P}$ est un pavage

achevé, on en déduit que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap A) \in \mathcal{P}$, i.e. $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap A \in \mathcal{P}$, et ce pour tout

$A \in \mathcal{P}$, ce qui prouve que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}_m$.

La preuve est analogue pour les suites décroissantes d'éléments de $\mathcal{P}_m$ et on en conclut que $\boxed{\mathcal{P}_m \text{ est achevé.}}$