

Liste d'exercices n°3

Sommes et produits

Exercice 1. Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Calculer les quantités suivantes.

1. $\sum_{i=1}^n 1$
2. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1$
3. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1$
4. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$
5. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n j$
6. $\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m k j^2$
7. $\sum_{k=0}^{n^2} \sum_{j=k}^{k+2} k j^2$

Exercice 2. Soient n un entier naturel, a un réel et x un réel non nul. Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^n x^{2k+1}$
2. $\sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} x^{-k}$
3. $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k x^j$
4. $\sum_{k=1}^n (-1)^k 2^{2k+1}$
5. $\sum_{k=1}^n 2^{2k+1} 3^{2k-1}$
6. $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(1-k)^3} + \frac{1}{k^3}$
7. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 3. Soit a un nombre réel, soit n un entier naturel non nul. Factoriser les sommes suivantes.

1. $S_n = 1 - 2a + 4a^2 + \dots + (-1)^n 2^n a^n$;
2. $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ka}{n}}$.

Exercice 4. Conjecturer, puis démontrer, la valeur de $\sum_{k=0}^n (2k+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^n}$. Calculer :

$$1) \sum_{k=0}^{2n+1} u_k; \quad 2) \sum_{k=1}^{2n} u_{2k}; \quad ; 3) \sum_{k=0}^n u_{2n-k}; \quad 4) \sum_{k=0}^n u_{k+n}; \quad 5) \sum_{k=0}^n u_k + n$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{k=1}^n (k-1)^2$:
 - (a) en utilisant la linéarité de la somme;
 - (b) en effectuant un changement d'indice.
2. (a) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.
 (b) En utilisant une somme télescopique, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^n k^3$.

Exercice 7. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$1) \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq p}} i(j^2 + 1); \quad 2) \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j}; \quad 3) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j}; \quad 4) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}; \quad 5) \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}.$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Calculer } \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i j.$$

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \max(k, j)$ et $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \min(k, j)$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |k-j|$.

Exercice 10. Soit n un entier naturel non nul. En reconnaissant une somme télescopique, calculer $\sum_{k=1}^n k k!$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Exercice 12. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Trouver trois réels a , b , et c tels que pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; -2\}$, on ait :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le terme u_n .
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Exercice 13. Soient n un entier naturel et q un réel non nul différent de 1. On pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n k q^{k-1}.$$

1. (a) En remarquant que, pour tout entier naturel k , on a $k = \sum_{i=1}^k 1$, calculer T_n .
(b) En introduisant la fonction $S_n: x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$, calculer T_n .
2. En utilisant cette dernière méthode, calculer la somme $\sum_{k=0}^n k^2 q^k$.