

Corrigé de la liste d'exercices n°2

Nombres réels

Exercice 1

Soient x et y deux réels avec $0 < x \leq y$.

Tout d'abord, on a $m = \frac{x+y}{2} \leq \frac{y+y}{2} = y$.

En appliquant ceci à la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, on a $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \leq \frac{1}{x}$ (car $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$).

En passant à l'inverse, on obtient $h \geq x$.

Montrons que $g \leq m$.

On a

$$m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$$

d'où $m \geq g$.

Enfin, il reste à montrer que $h \leq g$.

En appliquant l'inégalité $g \leq m$ aux réels strictement positifs $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, on a

$$0 < \sqrt{\frac{1}{x} \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right]^{-1} \leq \sqrt{xy}$$

par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où $h \leq g$.

On peut donc conclure que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

Exercice 2

1. • Supposons que $x \leq y$, i.e. $\max(x, y) = y$. On a alors $x - y \leq 0$ d'où

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = y = \max(x, y).$$

- Supposons que $x \geq y$, i.e. $\max(x, y) = x$. On a alors $x - y \geq 0$ d'où

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x = \max(x, y).$$

Dans tous les cas, on a bien $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

2. On peut appliquer la même méthode qu'en 1 ou bien remarquer que $\min(x, y) = -\max(-x, -y)$ d'où

$$\min(x, y) = -\max(-x, -y) = -\frac{1}{2}(-x-y+|-x-(-y)|) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

3. Par définition $x^+ = \max(x, 0) \geq 0$. De même, $\min(x, 0) \leq 0$ donc $x^- = -\min(x, 0) \geq 0$.

D'après les questions précédentes, on a $x^+ = \frac{1}{2}(x+|x|)$ et $x^- = -\frac{1}{2}(x-|x|) = \frac{1}{2}(|x|-x)$ donc $x^+ - x^- = x$ et $x^+ + x^- = |x|$.

Exercice 3

1. $|x| = |y| \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x$.
2. On a $|x| + |y| = 1 \Rightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [-1, 1]$.
 - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$.
 - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$.
 - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x + y = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$.
 - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x - y = 1 \Leftrightarrow y = -x - 1$.
3. $|x| - |y| = 2 \Rightarrow |x| \geq 2$.
 - Si $x \geq 2$ et $y \geq 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$.
 - Si $x \geq 2$ et $y \leq 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$.
 - Si $x \leq -2$ et $y \geq 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow -x - y = 2 \Leftrightarrow y = -x - 2$.
 - Si $x \leq -2$ et $y \leq 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow -x + y = 2 \Leftrightarrow y = x + 2$.
4. Si $|xy| = 2$, nécessairement $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$.
 - Si x et y sont de même signe, alors $|xy| = 2 \Leftrightarrow xy = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x}$.
 - Si x et y sont de signe opposé, alors $|xy| = 2 \Leftrightarrow -xy = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{x}$.
5. On a $|x| \leq |y| \Leftrightarrow -|y| \leq x \leq |y|$.
6. On a $|x| + |y| \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [-1, 1]$.
 - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1 - x$.
 - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow x - y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq y \geq x - 1$.
 - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow -x + y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq x + 1$.
 - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow -x - y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq y \geq -x - 1$.
7.
 - Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $|x| - |y| \leq 2 \Leftrightarrow x - y \leq 2 \Leftrightarrow y \geq x - 2$
 - Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, $|x| - |y| \leq 2 \Leftrightarrow x + y \leq 2 \Leftrightarrow y \leq 2 - x$.
 - Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, $|x| - |y| \leq 2 \Leftrightarrow -x - y \leq 2 \Leftrightarrow y \geq -x - 2$.
 - Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, $|x| - |y| \leq 2 \Leftrightarrow -x + y \leq 2 \Leftrightarrow y \leq x + 2$.
8. Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est vérifiée.
 Supposons dorénavant que $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$.
 - Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $|xy| \geq 2 \Leftrightarrow xy \geq 2 \Leftrightarrow y \geq \frac{2}{x}$.
 - Si $x > 0$ et $y < 0$, alors $|xy| \geq 2 \Leftrightarrow -xy \geq 2 \Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{x}$ (car $-x < 0$).
 - Si $x < 0$ et $y > 0$, alors $|xy| \geq 2 \Leftrightarrow -xy \geq 2 \Leftrightarrow y \geq -\frac{2}{x}$ (car $-x > 0$).
 - Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $|xy| \geq 2 \Leftrightarrow xy \geq 2 \Leftrightarrow y \leq \frac{2}{x}$ (car $x < 0$).

Exercice 4

1. • Si $x \geq 1$, on a $x - 1 \geq 0$ d'où

$$x < |x - 1| \Leftrightarrow x < x - 1 \Leftrightarrow 0 < -1,$$

ce qui est absurde. Donc il n'y a pas de solution réelle à l'inéquation dans ce cas.

- Si $x < 1$, on a $x - 1 < 0$ d'où

$$x < |x - 1| \Leftrightarrow x < 1 - x \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $] -\infty, \frac{1}{2}[$.

2. • Si $x \geq 1$, on a $x - 1 \geq 0$ d'où

$$x < -|x - 1| \Leftrightarrow x < -(x - 1) \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde car $x \geq 1$. Donc il n'y a pas de solution réelle à l'inéquation dans ce cas.

- Si $x < 1$, on a $x - 1 < 0$ d'où

$$x < -|x - 1| \Leftrightarrow x < -(1 - x) \Leftrightarrow x < x - 1 \Leftrightarrow 0 < -1,$$

ce qui est absurde.

Il n'y a donc pas de solution réelle à cette inéquation.

3. • Si $x \geq 1$, on a

$$x^2 < |x - 1| \Leftrightarrow x^2 < x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 0.$$

Or, ce trinôme du second degré n'a pas de racines sur $\mathbb{R}$ donc il est toujours du signe de son coefficient dominant, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$. L'inéquation n'a donc pas de solution dans le cas où $x \geq 1$.

- Si $x < 1$, on a

$$x^2 < |x - 1| \Leftrightarrow x^2 < 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 < 0.$$

Les racines de ce trinôme du second degré sont $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $] \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} [$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ et $-|x - 1| \leq 0$ donc l'inéquation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

5. • Si $x \geq \frac{1}{4}$, on a

$$x^2 < |x - \frac{1}{4}| \Leftrightarrow x^2 < x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0,$$

ce qui est impossible sur $\mathbb{R}$.

- Si $x < \frac{1}{4}$, on a

$$x^2 < |x - \frac{1}{4}| \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{4} - x \Leftrightarrow x^2 + x - \frac{1}{4} < 0.$$

Les racines de ce trinôme sont $\frac{-1 - \sqrt{2}}{2} < 0$ et $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2} < \frac{1}{4}$ donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $] \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} [$.

6. On a $|x - 5| < |x - 1| \Leftrightarrow -|x - 1| < x - 5 < |x - 1|$.

- Si $x \geq 1$, cette double inéquation équivaut à $-x + 1 < x - 5 < x - 1 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$.
- Si $x < 1$, cette double inéquation équivaut à $x - 1 < x - 5 < 1 - x$, qui n'a pas de solution car $-1 < -5$ est absurde.

Finalement, l'ensemble des solutions de cette équation est $]3, +\infty[$.

7. • Si $x \geq 2$, on a

$$1 < |x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow 1 < x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow 3 < x \leq 5.$$

- Si $x < 2$, on a

$$1 < |x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow 1 < 2 - x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1.$$

L'ensemble des solutions est donc $[-1, 1[\cup]3, 5]$.

8. • Si $x \geq 2$, on a

$$|x+2||x-2| > 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) > 4 \Leftrightarrow x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{8}.$$

• Si $-2 \leq x < 2$, on a

$$|x+2||x-2| > 4 \Leftrightarrow (x+2)(2-x) > 4 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 < 0,$$

ce qui est impossible sur $\mathbb{R}$.

• Si $x < -2$, on a

$$|x+2||x-2| > 4 \Leftrightarrow (-x-2)(2-x) > 4 \Leftrightarrow x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{8}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $] -\infty, -\sqrt{8}[\cup]\sqrt{8}, +\infty[$.

9. • Si $x \geq 1$, on a $|x-1| < |x| \Leftrightarrow x-1 < x \Leftrightarrow -1 < 0$, ce qui est toujours vrai donc tout $x \in [1, +\infty[$ est solution de l'inéquation.

• Si $0 \leq x < 1$, on a $|x-1| < |x| \Leftrightarrow 1-x < x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ donc tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$ est solution de l'inéquation.

• Si $x < 0$, on a $|x-1| < |x| \Leftrightarrow 1-x < -x \Leftrightarrow 1 < 0$, ce qui est faux.

Finalement, l'ensemble des solutions est $] \frac{1}{2}, +\infty[$.

10. • Si $x \geq 0$, on a $|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow x + x + 1 < 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ donc tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$ est solution de l'inéquation.

• Si $-1 \leq x < 0$, on a $|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow -x + x + 1 < 2 \Leftrightarrow 1 < 2$, ce qui est vrai donc tout $x \in [-1, 0[$ est solution de l'inéquation.

• Si $x < -1$, on a $|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow -x - x - 1 < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$ donc tout $x \in]-\frac{3}{2}, -1[$ est solution de l'inéquation.

Finalement, l'ensemble des solutions est $] -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$.

11. On a $\max(|x^2 - 2|, |x - 3|) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 2| \leq 1 \\ |x - 3| \leq 1. \end{cases}$

Résolvons séparément les deux inéquations.

• Résolvons l'inéquation $|x^2 - 2| \leq 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a $|x^2 - 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 3$.

- Si $x \geq 0$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$1 \leq x^2 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{3}.$$

- Si $x < 0$, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$, on a

$$1 \leq x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq -1.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x^2 - 2| \leq 1$ est $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

• Résolvons l'inéquation $|x - 3| \leq 1$.

On a $|x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$ donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - 3| \leq 1$ est $[2, 4]$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\max(|x^2 - 2|, |x - 3|) \leq 1$ est

$$([-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]) \cap [2, 4] = \emptyset.$$

12. • Si $x \geq 1$, on a

$$|x-1| + |x+1| \geq 1 \Leftrightarrow x-1 + x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est vrai pour tout $x \geq 1$ donc tout $x \in [1, +\infty[$ est solution de l'inéquation.

• Si $x \in [-1, 1[$, on a

$$|x-1| + |x+1| \geq 1 \Leftrightarrow 1-x + x+1 \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 1,$$

ce qui est vrai donc tout $x \in [-1, 1[$ est solution de l'inéquation.

• Si $x < -1$, on a

$$|x-1| + |x+1| \geq 1 \Leftrightarrow 1-x - x-1 \geq 1 \Leftrightarrow -2x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2},$$

ce qui est vrai pour tout $x < -1$ donc tout $x \in]-\infty, -1[$ est solution de l'inéquation.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto |x+1| - |x| + |x-1|$.

- Si $x < -1$, on a $f(x) = -1 - x - (-x) + 1 - x = -x$.
- Si $x \in [-1, 0[$, on a $f(x) = x + 1 - (-x) + 1 - x = x + 2$.
- Si $x \in [0, 1[$, on a $f(x) = x + 1 - x + 1 - x = -x + 2$.
- Si $x \geq 1$, on a $f(x) = x + 1 - x + x - 1 = x$.

Exercice 6

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(x+y) = \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \text{ et } f(x) + f(y) = \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} = \frac{|x| + |y| + 2|xy|}{1+|x|+|y|+|xy|}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) - f(x+y) &= \frac{(|x| + |y| + 2|xy|)(1+|x+y|) - |x+y|(1+|x|+|y|+|xy|)}{(1+|x+y|)(1+|x|+|y|+|xy|)} \\ &= \frac{|x| + |y| - |x+y| + |xy||x+y| + 2|xy|}{(1+|x+y|)(1+|x|+|y|+|xy|)}. \end{aligned}$$

Il est clair que le dénominateur est positif; $f(x) + f(y) - f(x+y)$ est donc du signe du numérateur.

On a $|xy||x+y| + 2|xy| \geq 0$. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, $|x| + |y| - |x+y| \geq 0$ donc $|x| + |y| - |x+y| + |xy||x+y| + 2|xy| \geq 0$, ce qui prouve que le numérateur est également positif.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a bien $f(x) + f(y) - f(x+y) \geq 0$, i.e. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 7

1. $\sup([-1, 1]) = 1; \inf([-1, 1]) = -1$.

2. $\sup([-1, 1] \cup \{2\}) = 2; \inf([-1, 1] \cup \{2\}) = -1$.
3. $\mathbb{N}$ n'est pas majoré mais est minoré et $\inf(\mathbb{N}) = 0$.
4. $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré, ni minoré.
5. $\sup(\mathbb{Q} \cap [-1, 1]) = 1; \inf(\mathbb{Q} \cap [-1, 1]) = -1$.
6. $\sup(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1; \inf(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.
7. $\sup(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\}) = 1; \inf(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\}) = 0$.
8. $\sup(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \{\frac{1}{n}\}) = 1; \inf(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \{\frac{1}{n}\}) = -1$.
9. $\sup(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{1+n^2}\}) = 1; \inf(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{1+n^2}\}) = 0$.
10. $\sup(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{3 + \frac{2}{n}\}) = 5; \inf(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{3 + \frac{2}{n}\}) = 3$.
11. On remarque tout d'abord que pour tout $n \geq 2, (-1)^n \frac{n+1}{n-1} = (-1)^n (1 + \frac{2}{n-1})$ et

$$\sup\left(\bigcup_{n \geq 2} \left\{(-1)^n \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)\right\}\right) = 3; \inf\left(\bigcup_{n \geq 2} \left\{(-1)^n \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)\right\}\right) = -2.$$

12. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$ n'est pas majoré mais est minoré et $\inf\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}\right) = 1$.
13. $\bigcup_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m > n} \left\{\frac{m}{n}\right\}$ n'est pas majoré mais est minoré et $\inf\left(\bigcup_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m > n} \left\{\frac{m}{n}\right\}\right) = 1$.
14. $\{x \in \mathbb{R}, x^3 \geq 3\} = [\sqrt[3]{3}, +\infty[$ donc ce n'est pas un ensemble majoré mais c'est un ensemble minoré de borne inférieure $\sqrt[3]{3}$.
15. $\{x \in \mathbb{R}, x|x| < x^2\} = \mathbb{R}_+$ donc ce n'est pas un ensemble minoré mais c'est un ensemble majoré de borne supérieure 0.
16. Il s'agit d'étudier la fonction $f : t \mapsto \frac{t+1}{t^2+1}$ sur $] -2, 5[$.

$$\text{On a pour tout } t \in] -2, 5[, f'(t) = \frac{t^2+1-2t^2-2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2} = -\frac{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})}{(t^2+1)^2}.$$

Le dénominateur étant toujours positif, $f'(t)$ est du signe du numérateur, i.e. $f'(t) \geq 0$ si $t \in] -2, -1+\sqrt{2}]$ et $f'(t) \leq 0$ si $t \in [-1+\sqrt{2}, 5[$ donc f atteint son maximum en $-1+\sqrt{2}$ et celui-ci vaut

$$f(-1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}},$$

qui est la borne supérieure de l'ensemble étudié.

De plus, $f(-2) = -\frac{1}{5}$ et $f(5) = \frac{6}{25}$ donc la borne inférieure de l'ensemble étudié est $-\frac{1}{5}$.

17. Il s'agit d'étudier la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$ donc $f'(t) \geq 0$ si $t \in [-1, 1]$ et $f'(t) \leq 0$ si $t \leq -1$ et si $t \geq 1$.

Ainsi, f est décroissante sur $] -\infty, -1]$, croissante sur $[-1, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Par ailleurs, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0, f(-1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$.

Finalement, $\inf\{x \in \mathbb{R} | \exists t \in \mathbb{R}, x = \frac{t}{t^2+1}\} = -\frac{1}{2}$ et $\sup\{x \in \mathbb{R} | \exists t \in \mathbb{R}, x = \frac{t}{t^2+1}\} = \frac{1}{2}$.

18. On a $\{x \in \mathbb{R} | \exists t \in \mathbb{R}, x = \sin(t)\} = [-1, 1]$ et $\inf([-1, 1]) = -1$ et $\sup([-1, 1]) = 1$.
19. On a $\{x \in \mathbb{R} | \exists t \in \mathbb{R}, x = t^2\} = [0, +\infty[$. Cet ensemble n'est donc pas majoré mais admet 0 pour borne inférieure.
20. On a $\{x \in \mathbb{R}^* | \frac{1}{x} \geq -3\} =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup \mathbb{R}_+^*$. Cet ensemble n'est donc ni minoré ni majoré.
21. Si $|s| + |t| \leq 1$, on a nécessairement $(s, t) \in [-1, 1]^2$ et $|s| - 1 \leq t \leq 1 - |s|$.
- Si $s \geq 0$, ceci implique que $s(s - 1) \leq st \leq s(1 - s) \Leftrightarrow s^2 - s \leq st \leq s - s^2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq st \leq \frac{1}{4}$ car $s \mapsto s - s^2$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en $\frac{1}{2}$ et celui-ci vaut $\frac{1}{4}$.
 - Si $s \leq 0$, ceci implique que $s(s + 1) \leq st \leq s(-1 - s) \Leftrightarrow s^2 + s \leq st \leq -s - s^2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq st \leq \frac{1}{4}$ car $s \mapsto s + s^2$ atteint son minimum sur $[-1, 0]$ en $-\frac{1}{2}$ et celui-ci vaut $-\frac{1}{4}$.
- Ainsi, $\inf\{st, |s| + |t| \leq 1\} = -\frac{1}{4}$ et $\sup\{st, |s| + |t| \leq 1\} = \frac{1}{4}$.
22. On a $s^2 + t^2 \leq 1 \Rightarrow |t| \leq \sqrt{1 - s^2} \Rightarrow -\sqrt{1 - s^2} \leq t \leq \sqrt{1 - s^2}$ avec $(s, t) \in [-1, 1]^2$.
- Si $s \geq 0$, on a $-s\sqrt{1 - s^2} \leq st \leq s\sqrt{1 - s^2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq st \leq \frac{1}{2}$ (maximum de $s \mapsto s\sqrt{1 - s^2}$ atteint en $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et vaut $\frac{1}{2}$).
 - Si $s \leq 0$, on trouve de même que $-\frac{1}{2} \leq st \leq \frac{1}{2}$ donc

$$\inf\{st, s^2 + t^2 \leq 1\} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sup\{st, s^2 + t^2 \leq 1\} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8

1. • Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
 Supposons que $\sup(A) \geq \sup(B)$ de telle sorte que $\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(A)$.
 L'autre cas se traite de la même manière.
 Montrons dans ce cas que $\sup(A \cup B) = \sup(A)$.
 Tout d'abord, on a pour tout $x \in A, x \leq \sup(A)$ et pour tout $x \in B, x \leq \sup(B) \leq \sup(A)$ d'où

$$\forall x \in A \cup B, x \leq \sup(A),$$

donc $\sup(A)$ est bien un majorant de $A \cup B$.

Montrons que $\sup(A)$ est le plus petit majorant de $A \cup B$, i.e. montrons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cup B, \sup(A) - \varepsilon < x \leq \sup(A).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sup(A)$, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < x \leq \sup(A)$.
 Or, si $x \in A$, a fortiori, $x \in A \cup B$ donc on a bien la propriété voulue, ce qui assure que $\sup(A \cup B) = \sup(A)$.

Si on a $\sup(B) \geq \sup(A)$, on montre de même que $\sup(A \cup B) = \sup(B)$.

• Supposons désormais que $A \cap B \neq \emptyset$. On a alors pour tout $x \in A \cap B, x \leq \sup(A)$ et $x \leq \sup(B)$.

Ainsi, $A \cap B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure $\sup(A \cap B)$. Puisque $\sup(A)$ et $\sup(B)$ sont des majorants de $A \cap B$, on en déduit $\sup(A \cap B) \leq \sup(A)$ et $\sup(A \cap B) \leq \sup(B)$, ce qui prouve bien que

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B)).$$

Cette inégalité peut être stricte.

Prenons par exemple $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0, 2\}$. Alors $\sup(A) = 1$ et $\sup(B) = 2$.

D'autre part, on a $\sup(A \cap B) = \sup(\{0\}) = 0 < 1 = \min(\sup(A), \sup(B))$.

2. Montrons que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Soit $(x, y) \in A \times B$. Alors on a $x + y \leq \sup(A) + \sup(B)$ donc $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$. Montrons que c'est le plus petit des majorants de $A + B$.

●1ère méthode (technique) :

Soit $\varepsilon > 0$. Par propriété de $\sup(A)$, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq \sup(A)$.

De même, il existe $y \in B$ tel que $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq \sup(B)$.

En additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < x + y \leq \sup(A) + \sup(B)$$

avec $x + y \in A + B$. On a donc bien montré que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

●2ème méthode (élégante) :

Soit M un majorant de $A + B$. On a

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in A \times B, a + b \leq M &\Rightarrow \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq M - b \\ &\Rightarrow \forall b \in B, M - b \text{ est un majorant de } A \\ &\Rightarrow \forall b \in B, \sup(A) \leq M - b \\ &\Rightarrow \forall b \in B, b \leq M - \sup(A) \\ &\Rightarrow M - \sup(A) \text{ est un majorant de } B \\ &\Rightarrow \sup(B) \leq M - \sup(A) \\ &\Rightarrow \sup(A) + \sup(B) \leq M, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit majorant de $A + B$, i.e. $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

3. Supposons que $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$.

Montrons que dans ce cas $\sup(A) \sup(B) = \sup(AB)$.

Soient $(x, y) \in A \times B$. On a $x \leq \sup(A)$ et $y \leq \sup(B)$. Puisque tous les termes sont positifs, on a

$$xy \leq x \sup(B) \leq \sup(A) \sup(B)$$

donc $\sup(A) \sup(B)$ est un majorant de AB .

Pour montrer que $\sup(AB) = \sup(A) \sup(B)$, il suffit alors de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in A \times B, \sup(A) \sup(B) - \varepsilon < xy \leq \sup(A) \sup(B).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\delta > 0$, $\exists (x, y) \in A \times B$ tels que $\sup(A) - \delta < x \leq \sup(A)$ et $\sup(B) - \delta < y \leq \sup(B)$. En multipliant ces inégalités, on obtient

$$\sup(A) \sup(B) - \delta(\sup(A) + \sup(B)) \leq \sup(A) \sup(B) - \delta(\sup(A) + \sup(B)) + \delta^2 < xy \leq \sup(A) \sup(B).$$

Si on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{\sup(A) + \sup(B) + 1}$, alors $\delta(\sup(A) + \sup(B)) < \varepsilon$, donc

$$\sup(A) \sup(B) - \varepsilon < xy \leq \sup(A) \sup(B).$$

On a donc bien montré que $\sup(AB) = \sup(A) \sup(B)$.

4. Posons $A = \{-1\}$ et $B = \{-1, 0\}$. Alors $AB = \{0, 1\}$ et on a bien

$$\sup(A) \sup(B) = -1 \times 0 = 0 < 1 = \sup(AB).$$

Exercice 9

Tout élément de B est de la forme $x - y$ pour $(x, y) \in A^2$ avec $x \geq y$.

Si $x \in A$, alors $x \leq \sup(A)$ et si $y \in A$, alors $-y \leq -\inf(A)$ donc $x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$.

Ainsi, $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B . Pour montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$, il reste à montrer que c'est le plus petit majorant de B .

Soit m un majorant de B . Alors pour tout $(x, y) \in A^2$, on a

$$x - y \leq |x - y| \leq m$$

d'où $x \leq y + m$.

Fixons $y \in A$. Alors $y + m$ est un majorant de A donc est supérieur au plus petit majorant de A , i.e.

$$\forall y \in A, \sup(A) \leq y + m,$$

i.e. $\sup(A) - m \leq y$ pour tout $y \in A$.

On en déduit que $\sup(A) - m$ est un minorant de A , donc est inférieur au plus grand minorant de A , d'où

$$\sup(A) - m \leq \inf(A)$$

ce qui implique que $\sup(A) - \inf(A) \leq m$.

On a donc montré que $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B et est inférieur à tous les majorants de B : c'est donc le plus petit majorant de B , c'est à dire la borne supérieure de B .

On en conclut que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 10

Notons $A = \{x \in [0, 1], f(x) \leq x\}$. On a $f(1) \leq 1$ donc $1 \in A$. Ainsi, A est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$ donc A admet une borne inférieure, qu'on note $a = \inf(A) \in [0, 1]$.

Montrons que $f(a) = a$.

• Puisque $a = \inf(A)$, pour tout $x \in A$, $a \leq x$. Par croissance de f , ceci implique que pour tout $x \in A$, $f(a) \leq f(x)$.

Or, par définition de A , pour tout $x \in A$, $f(x) \leq x$ donc pour tout $x \in A$, $f(a) \leq x$, ce qui implique que $f(a)$ est un minorant de A . Puisque a est le plus grand minorant de A , on en déduit que $f(a) \leq a$.

• Puisque $f(a) \leq a$, en appliquant de nouveau la croissance de f , on a $f(f(a)) \leq f(a)$, ce qui signifie que $f(a) \in A$. Nécessairement, on a $f(a) \geq \inf(A) = a$.

On a donc $f(a) = a$, ce qui prouve que a est un point fixe de f .

Exercice 11

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n = \lfloor x \rfloor$.

• Si $n \leq x < n + \frac{1}{2}$, on a $n - 4 \leq x - 4 < n - \frac{7}{2} < n - 3$ donc $\lfloor x - 4 \rfloor = n - 4$.

D'autre part, $n \leq x < n + \frac{1}{2} \Rightarrow 2n \leq 2x < 2n + 1 \Rightarrow 2n - 1 \leq 2x - 1 < 2n$ donc $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n - 1$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ implique $n - 4 = 2n - 1$ d'où $n = -3$.

Ainsi, dans ce cas, on a $x \in [-3, -\frac{5}{2}[$.

• Si $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$, on a $n - 4 < n - \frac{7}{2} \leq x - 4 < n - 3$ donc $\lfloor x - 4 \rfloor = n - 4$.

D'autre part, $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \Rightarrow 2n + 1 \leq 2x < 2n + 2 \Rightarrow 2n \leq 2x - 1 < 2n + 1$ donc $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ implique $n - 4 = 2n$ d'où $n = -4$.

Ainsi, dans ce cas, on a $x \in [-\frac{7}{2}, -3[$.

Finalement, l'ensemble des réels x tels que $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ est $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.

Autre méthode : Par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n = \lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$. Par définition de la partie entière, on a

$$\begin{cases} n \leq 2x - 1 < n + 1 \\ n \leq x - 4 < n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leq 2x - 1 < n + 1 \\ -1 - n < 4 - x \leq -n \end{cases}$$

Par somme, on obtient $-1 < x + 3 < 1$ d'où $-4 < x < -2$.

Synthèse : - Si $-4 < x < -\frac{7}{2}$, alors $-8 < x - 4 < -\frac{15}{2} < -7$ donc $\lfloor x - 4 \rfloor = -7$.

D'autre part, si $-4 < x < -\frac{7}{2}$, alors $-8 < 2x < -7$ donc $-9 < 2x - 1 < -8$ d'où $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -9$ et on n'a pas l'égalité dans ce cas-là.

• Si $-\frac{7}{2} \leq x < -3$, alors $-8 \leq -\frac{15}{2} \leq x - 4 < -7$ d'où $\lfloor x - 4 \rfloor = -8$.

D'autre part, si $-\frac{7}{2} \leq x < -3$, alors $-7 \leq 2x < -6$ donc $-8 \leq 2x - 1 < -7$ d'où $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -8 = \lfloor x - 4 \rfloor$.

• Si $-3 \leq x < -\frac{5}{2}$, alors $-7 \leq x - 4 < -\frac{13}{2} < -6$ donc $\lfloor x - 4 \rfloor = -7$.

D'autre part, si $-3 \leq x < -\frac{5}{2}$, alors $-6 \leq 2x < -5$ donc $-7 \leq 2x - 1 < -6$ d'où $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -7 = \lfloor x - 4 \rfloor$.

• Si $-\frac{5}{2} \leq x < -2$, alors $-7 < -\frac{13}{2} \leq x - 4 < -6$ d'où $\lfloor x - 4 \rfloor = -7$.

D'autre part, si $-\frac{5}{2} \leq x < -2$, alors $-5 \leq 2x < -4$ donc $-6 \leq 2x - 1 < -5$ d'où $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -6$ et on n'a pas l'égalité dans ce cas-là.

Finalement, l'ensemble des réels x tels que $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ est $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.

Exercice 12

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière de x , on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc

$$\lfloor x \rfloor + k \leq x + k < \lfloor x \rfloor + k + 1.$$

Par définition de la partie entière, ceci implique que $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de la partie entière de x et de y , on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc par somme, on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

On a donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ ou $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, d'où $\lfloor x + y \rfloor \in \{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1\}$, i.e. $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

3. Soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

• Si n et m sont de même parité, alors $n + m$ est pair donc $\frac{n + m}{2} \in \mathbb{Z}$ d'où

$$\left\lfloor \frac{n + m}{2} \right\rfloor = \frac{n + m}{2}.$$

D'autre part, dans ce cas $n - m + 1$ est impair donc $\left\lfloor \frac{n - m + 1}{2} \right\rfloor = \frac{n - m}{2}$ car

$$\frac{n - m}{2} \leq \frac{n - m + 1}{2} < \frac{n - m}{2} + 1$$

et $\frac{n - m}{2}$ est un entier puisque $n - m$ est pair.

Ainsi, on a $\left\lfloor \frac{n + m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n - m + 1}{2} \right\rfloor = \frac{n + m}{2} + \frac{n - m}{2} = n$.

• Si n et m ne sont pas de même parité, alors $n + m$ est impair et $n + m - 1$ est pair donc $\frac{n + m - 1}{2} \in \mathbb{Z}$ et on a

$$\frac{n + m - 1}{2} \leq \frac{n + m}{2} < \frac{n + m - 1}{2} + 1$$

donc $\left\lfloor \frac{n + m}{2} \right\rfloor = \frac{n + m - 1}{2}$.

D'autre part, dans ce cas, $n - m + 1$ est pair donc $\frac{n - m + 1}{2} \in \mathbb{Z}$ d'où $\left\lfloor \frac{n - m + 1}{2} \right\rfloor = \frac{n - m + 1}{2}$.

Ainsi, on a $\left\lfloor \frac{n + m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n - m + 1}{2} \right\rfloor = \frac{n + m - 1}{2} + \frac{n - m + 1}{2} = n$.

Finalement, dans tous les cas, on a pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \frac{n + m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n - m + 1}{2} \right\rfloor = n$.

4. • Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Soit $p = \left\lfloor \frac{x + m}{n} \right\rfloor$. Par définition de la partie entière, on a

$$p \leq \frac{x + m}{n} < p + 1$$

d'où

$$np \leq x + m < np + n$$

ou encore $np - m \leq x < np + n - m$.

Par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lfloor np - m \rfloor \leq \lfloor x \rfloor$ i.e. $np - m \leq \lfloor x \rfloor$ et par propriété de la partie entière $\lfloor x \rfloor \leq x < np + n - m$.

Puisque $np - m$ est un entier, on en déduit que $np - m \leq \lfloor x \rfloor < np + n - m$ d'où

$$np \leq \lfloor x \rfloor + m < np + n \Rightarrow p \leq \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} < p + 1,$$

ce qui implique que $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor = p = \left\lfloor \frac{x + m}{n} \right\rfloor$.

• En appliquant le résultat précédent en remplaçant x par nx et m par 0, on trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nx}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 13

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ (l'énoncé propose de prendre un réel, mais tant qu'à faire, prenons un entier !) tel que $q > \frac{1}{y - x}$.

(a) Soit $m = \lfloor qx \rfloor$. Alors, par définition de la partie entière, on a

$$m \leq qx < m + 1 \Leftrightarrow \frac{m}{q} \leq x < \frac{m}{q} + \frac{1}{q}.$$

Or, puisque $q > \frac{1}{y-x}$, on a $\frac{1}{q} < y-x$ d'où

$$\frac{m}{q} + \frac{1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + y - x = y.$$

Ainsi, on a bien

$$x < \frac{m+1}{q} < y.$$

(b) Puisque $m \in \mathbb{Z}$, on a $m+1 \in \mathbb{Z}$ et puisque $q \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\frac{m+1}{q} \in \mathbb{Q}$.

On a donc montré que $\frac{m+1}{q} \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$ d'où $\mathbb{Q} \cap]x, y[\neq \emptyset$.

Ceci étant vrai pour tout couple de réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$, on en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Il s'agit désormais de montrer que dans tout intervalle de la forme $]x, y[$ avec $x < y$, il existe au moins un nombre irrationnel.

Pour ce faire, considérons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Alors, on a $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$.

D'après la question précédente, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q} \cap]x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}[$, i.e.

$$x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$$

d'où

$$x < r + \sqrt{2} < y.$$

Montrons que $r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est à dire supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$. De même, puisque $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{a'}{b'}$.

On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - r = \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - a'b}{bb'} \in \mathbb{Q}$$

donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde.

Ainsi, $r + \sqrt{2}$ est irrationnel et appartient à $]x, y[$.

On a donc montré qu'il existait un nombre irrationnel dans tout intervalle de la forme $]x, y[$ avec $x < y$, ce qui prouve que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14

- $\mathbb{R}$.
- $] - 2, 1[$.
- $] - 3, 0[$.
- On a $x < x^2 - 12 < 4x \Leftrightarrow x^2 - x - 12 > 0$ et $x^2 - 4x - 12 < 0 \Leftrightarrow x \in (]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[) \cap (]-2, 6[) \Leftrightarrow x \in]4, 6[$.
- $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
- $] - 3, 2[$.
- Si $x > -2$, on a $\frac{2x+1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow 2x+1 < x+2 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in] - 2, 1[$.
 - Si $x < -2$, on a $\frac{2x+1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow 2x+1 > x+2 \Leftrightarrow x > 1$, ce qui est absurde.

L'ensemble cherché est donc $] - 2, 1[$.
- $[1, +\infty[$.
- $] - \infty, -2] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 15

1. $(x, y) = (-2, -3)$ ou $(x, y) = (-3, -2)$.
2. $(x, y) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ou $(x, y) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
3. x et y sont racines du trinôme $r^2 - mr + 1 = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = m^2 - 4$.
 - Si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, $\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes que sont $(x, y) = \left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}, \frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$ ou $(x, y) = \left(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}, \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$.
 - Si $m \in \{-2, 2\}$, $\Delta = 0$ et le trinôme admet une racine double $(x, y) = \left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$.
 - Si $m \in]-2, 2[$, $\Delta < 0$ donc le trinôme n'a pas de racines réelles.

Exercice 16

On a $e^x + me^{-x} - m - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x + me^{-x} - m - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - (m+1)e^x + m = 0$.

Posons $y = e^x$.

L'équation est alors équivalente à $y^2 - (m+1)y + m = 0 \Leftrightarrow y = m$ ou $y = 1 \Leftrightarrow e^x = m$ ou $e^x = 1$.

- Si $m > 0$, ceci équivaut à $x = \ln(m)$ ou $x = 0$, qui sont donc les deux solutions de l'équation.
- Si $m \leq 0$, il y a une seule solution qui est $x = 0$.

Exercice 17

On raisonne par analyse-synthèse.

1. **• Analyse :** Soit $x \geq -7$ tel que $5 - x = \sqrt{x+7}$.
En élevant cette équation au carré, on obtient $x^2 - 10x + 25 = x + 7$ d'où $x^2 - 11x + 18 = 0$.
Ce trinôme du second degré admet pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 9$ donc si x est solution de l'équation de départ, nécessairement $x = 2$ ou $x = 9$.
• Synthèse : Vérifions si $x = 2$ et $x = 9$ sont bien solutions de l'équation.
Si $x = 2$, on a bien $5 - x = 3$ et $\sqrt{x+7} = \sqrt{9} = 3$.
Si $x = 9$, on a $5 - x = -4$ et $\sqrt{x+7} = \sqrt{16} = 4$ donc $x = 9$ n'est pas solution de l'équation.
Ainsi, l'unique solution de l'équation est $x = 2$.
2. L'équation est bien définie si $-2x + 4 \geq 0$ et $x^2 - 3 \geq 0$, i.e. $x \leq 2$ et $x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$.
On a $\sqrt{-2x+4} - \sqrt{x^2-3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-2x+4} = \sqrt{x^2-3}$. Puisque les racines carrées sont des nombres positifs, par élévation au carré, ceci équivaut à

$$-2x + 4 = x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -1 - 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -1 + 2\sqrt{2}.$$

On a bien $-1 - 2\sqrt{2} < -\sqrt{3}$ et $-1 + 2\sqrt{2} \in [\sqrt{3}, 2]$ donc ce sont bien les deux solutions de cette équation.

3. L'équation est bien définie pour $x \geq -\frac{1}{2}$.
• Analyse : Soit $x \geq -\frac{1}{2}$ tel que $x + \sqrt{2x+1} = 1$.

Alors $\sqrt{2x+1} = 1-x$ d'où par élévation au carré

$$2x+1 = (1-x)^2 \Rightarrow 2x+1 = 1-2x+x^2 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=4.$$

•**Synthèse** : Si $x=0$, on a bien $x+\sqrt{2x+1} = \sqrt{1} = 1$.

Si $x=4$, on a $x+\sqrt{2x+1} = 4+\sqrt{9} = 13 \neq 1$ donc l'unique solution est $x=0$.