Liste d'exercices n°6 — Trigonométrie

Exercice 1. Soient $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les formules suivantes :

1. $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
2. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
3. $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
4. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3a), \cos(4a), \sin(3a), \sin(4a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\pi;\pi]$.

1. $\sin(x) = -\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$
2. $\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
4. $\sin(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
5. $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$
6. $\cos(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\tan(x) = \sqrt{3}$
2. $\sin(2x) = \sqrt{3}$
3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $2\cos(3x) = 1$
5. $\tan(2x) = -1$

Exercice 5. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\sin(x) < \pi$
2. $\sin(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\tan(x) > \sqrt{3}$
5. $\cos(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
6. $\sin(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{3}$
2. $\sqrt{3}\cos(7x)-\sin(7x) = 1$
3. $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos(x)$
4. $2\cos^2(x) = 7\cos(x)-3$
5. $\left\{\begin{array}{rcl} 2\sin(x)-4\cos(x) & = & \sqrt{3}+2 \\ \sin(x)+\sqrt{3}\cos(x) & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 7. Comment doit-on choisir w pour que l'équation suivante

$$1+\sin^2(wx) = \cos(x),$$

d'inconnue x réelle ait une unique solution ?

Exercice 8. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Exercice 9. Soit θ un réel tel que $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$.
On pose $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 10. Résoudre l'équation $\cos^n(x)+\sin^n(x) = 1$, où n est un entier strictement positif.

Exercice 11. Soient a, b, c, d des éléments de $[0, \pi]$.

1. Montrer que $\sin(a) + \sin(b) \leq 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.
2. En déduire que $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) \leq 4\sin\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)$.
3. Montrer que $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq 3\sin\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$.

Exercice 12. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\theta).$$

(Indication : calculer $2\sin(\theta)S$ et faire apparaître une somme télescopique.)

Exercice 13. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta).$$